

Beweise der Ableitungsregeln

SATZ.

Beweis: [E-Book](#)

Summenregel: $f(x) = g(x) \pm h(x) \Rightarrow f'(x) = g'(x) \pm h'(x)$

Eine **Summe** bzw. eine **Differenz** von Funktionen kann **gliedweise differenziert** werden.

insbesondere: $f(x) = g(x) \pm c \Rightarrow f'(x) = g'(x)$ (mit $c \in \mathbb{R}$)

Beim Differenzieren **fallen konstante Summanden weg**.

Faktorregel: $f(x) = c \cdot g(x) \Rightarrow f'(x) = c \cdot g'(x)$ (mit $c \in \mathbb{R}$)

Beim Differenzieren **bleiben konstante Faktoren erhalten**.

Für den Beweis verwendet man jeweils die Definition des Differentialquotienten:

DEFINITION.

Ist f eine reelle Funktion, dann heißt der Grenzwert $f'(x) := \lim_{z \rightarrow x} \frac{f(z) - f(x)}{z - x}$ **Änderungsrate** oder **Differentialquotient** von f an der Stelle x .

Beweis der Summenregel

Mit $f(x) = g(x) + h(x)$ gilt:

$$f'(x) = \lim_{z \rightarrow x} \frac{f(z) - f(x)}{z - x} = \lim_{z \rightarrow x} \frac{g(z) + h(z) - (g(x) + h(x))}{z - x} = \lim_{z \rightarrow x} \left(\frac{g(z) - g(x)}{z - x} + \frac{h(z) - h(x)}{z - x} \right) = g'(x) + h'(x) \quad \square$$

Beweis der Faktorregel

Mit $f(x) = c \cdot g(x)$ gilt:

$$f'(x) = \lim_{z \rightarrow x} \frac{f(z) - f(x)}{z - x} = \lim_{z \rightarrow x} \frac{c \cdot g(z) - c \cdot g(x)}{z - x} = \lim_{z \rightarrow x} \left(c \cdot \frac{g(z) - g(x)}{z - x} \right) = c \cdot g'(x) \quad \square$$