DURCH STARTEN

MATHEMATIK

11 bis 12

ÜBUNGSBUCH

Grundkompetenz-Aufgaben

Aufgrund der neuen schriftlichen Reifeprüfung in Mathematik ist es notwendig, sich mit den neuen Grundkompetenz-Aufgaben auseinanderzusetzen. Die Online-Ergänzung „Grundkompetenz-Aufgaben“ enthält diese Aufgaben zu allen Inhaltsbereichen.
Es ergänzt und aktualisiert damit das bestehende Übungsbuch DURCHSTARTEN MATHEMATIK MATURA/7. + 8. Klasse, welches mit seinen vielen vernetzten Übungsaufgaben weiterhin verwendet werden kann.
Somit können sich Schülerinnen und Schüler mit DURCHSTARTEN optimal auf die neue schriftliche Reifeprüfung in Mathematik vorbereiten.

ISBN 978-3-7058-7410-7

VERITAS
Gemeinsam besser lernen

INHALTSVERZEICHNIS

Vorwort **3**

1 Algebra und Geometrie **4**

2 Funktionale Abhängigkeiten **5**

FA 1 Funktionsbegriff, reelle Funktionen, Darstellungsformen und Eigenschaften 5

FA 2 Lineare Funktionen $f(x) = k \cdot x + d$ 6

FA 4 Polynomfunktion $f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i \cdot x^i$ mit $n \in \mathbb{N}$ 7

FA 5 Exponentialfunktion $f(x) = a \cdot b^x$ bzw. $f(x) = a \cdot e^{\lambda \cdot x}$ mit $a, b \in \mathbb{R}^+$, $\lambda \in \mathbb{R}$ 10

FA 6 Sinusfunktion, Cosinusfunktion 11

3 Analysis **13**

AN 1 Änderungsmaße 13

AN 2 Regeln für das Differenzieren 16

AN 3 Ableitungsfunktion/Stammfunktion 17

4 Wahrscheinlichkeit und Statistik **21**

WS 2 Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung 21

WS 3 Wahrscheinlichkeitsverteilung(en) 22

Lösungen **24**

Lehrplan **27**

VORWORT

Die Online Ergänzung zu "Durchstarten zur AHS-Matura Mathematik" richtet sich an alle Schülerinnen und Schüler der 7. und 8. Klasse (11. und 12. Schulstufe), die sich während des Schuljahres auf Schularbeiten und Prüfungen bzw. an jene Schülerinnen und Schüler, die sich auf die neue schriftliche Reifeprüfung (Zentralmatura) vorbereiten möchten. Dabei stehen die Grundkompetenzen mit den neuen Aufgabenformaten im Mittelpunkt.

Aufgrund der neuen schriftlichen Reifeprüfung ist es notwendig, sich spätestens ab der 5. Klasse (9. Schulstufe) mit den neuen Aufgabenformaten auseinanderzusetzen. Es gibt offene und halboffene Aufgabenformate, aber auch viele verschiedene Multiple-Choice Formate. Bei der Matura werden auf diese Art und Weise nur die Grundkompetenzen (und nicht der gesamte Lehrplan) abgeprüft. Deswegen beinhalten die Aufgaben im neuen Format ebenfalls nur die Grundkompetenzen.

Bei den Grundkompetenz-Aufgaben können eine oder mehrere Lösungen richtig sein. Jede vollständig gelöste Aufgabe ergibt zB 2 Punkte. Fehlt eine richtige Lösung oder ist eine falsche Antwort als richtig gekennzeichnet, gibt es keine Punkte!

Es sind alle bis zur 7. Klasse relevanten Grundkompetenzen angeführt. Jene, welche schon in der 5. oder 6. Klasse behandelt wurden, sind in grau geschrieben.

Ich hoffe, dass die vorliegenden Teil 1-Aufgaben jeder Schülerin und jedem Schüler eine effiziente Hilfe bei der Vorbereitung auf die Schularbeit, Prüfung bzw. Matura sein können und das zuweilen auftretende mulmige Gefühl bei dem Gedanken daran etwas verfliegen lässt.

Allen Benutzerinnen und Benutzern ein erfolgreiches Abschneiden in diesem Schuljahr!

Mone Crillovich-Cocoglia

1 ALGEBRA UND GEOMETRIE

Grundbegriffe der Algebra

AG 1.1 Wissen über die Zahlenmengen $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ verständig einsetzen können.
AG 1.2 Wissen über algebraische Begriffe angemessen einsetzen können: Variable, Terme, Formeln, (Un-)Gleichungen, Gleichungssysteme, Äquivalenz, Umformungen, Lösbarkeit

Bei den Zahlenmengen soll man die Mengenbezeichnungen und die Teilmengenbeziehungen kennen, Elemente angeben sowie zuordnen können und die reellen Zahlen als Grundlage kontinuierlicher Modelle kennen. Zum Wissen über die reellen Zahlen gehört auch, dass es Zahlenbereiche gibt, die über $\mathbb{R}$ hinausgehen.
Die algebraischen Begriffe soll man anhand von einfachen Beispielen beschreiben/erklären und verständig verwenden können.

1 **AG 1.1** Ordne den Zahlen jeweils die kleinste Zahlenmenge zu, in der sie enthalten sind!

$3i$	A
$\sqrt{3}$	B
$-\frac{1}{32}$	C
-5	D

1	$\mathbb{N}$
2	$\mathbb{Z}$
3	$\mathbb{Q}$
4	$\mathbb{R}^+$
5	$\mathbb{R}$
6	$\mathbb{C}$

2 **AG 1.2** Gegeben sind verschiedene Aussagen über Gleichungen in einer Unbekannten $x \in \mathbb{R}$ der Form: Gleichung A $\Leftrightarrow$ Gleichung B. Eine solche Aussage ist genau dann richtig, wenn Gleichung A äquivalent zu Gleichung B ist. Kreuze die beiden korrekten Aussagen an!

A ☐	$e^{-x} \cdot (1 - x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$
B ☐	$e^{\frac{x}{2}} = 2 \Leftrightarrow x = \ln(2)$
C ☐	$-\frac{3}{2}x^2 - 3x + 1 = x^3 - 3x + 1 \Leftrightarrow x^2 \cdot \left(-\frac{3}{2} - x\right) = 0$
D ☐	$\frac{-8x^2 + 72}{(x^2 + 9)^2} = 0 \Leftrightarrow -8x^2 + 72 = (x^2 + 9)^2$
E ☐	$e^x + e^{2x} + e^{3x} = 5 \Leftrightarrow e^x \cdot (1 + e^x + e^{2x})$

© VERITAS-Verlag, Linz. DURCHSTARTEN ZUR AHS-MATURA MATHEMATIK. Alle Rechte vorbehalten

2 FUNKTIONALE ABHÄNGIGKEITEN

FA 1 Funktionsbegriff, reelle Funktionen, Darstellungsformen und Eigenschaften

FA 1.1 Für gegebene Zusammenhänge entscheiden können, ob man sie als Funktion betrachten kann.
FA 1.2 Formeln als Darstellung von Funktionen interpretieren und dem Funktionstyp zuordnen können.
FA 1.3 Zwischen tabellarischen und grafischen Darstellungen funktionaler Zusammenhänge wechseln können.
FA 1.4 Aus Tabellen, Graphen und Gleichungen von Funktionen Werte(paare) ermitteln und im Kontext deuten können.

Der Graph einer Funktion ist als Menge der Wertepaare definiert. Einer verbreitete Sprechweise folgend nennen wir die grafische Darstellung des Graphen im kartesischen Koordinatensystem jedoch ebenfalls kurz „Graph".

FA 1.5 Eigenschaften von Funktionen erkennen, benennen, im Kontext deuten und zum Erstellen von Funktionsgraphen einsetzen können: Monotonie, Monotoniewechsel (lokale Extrema), Wendepunkte, Periodizität, Achsensymmetrie, asymptotisches Verhalten, Schnittpunkte mit den Achsen.
FA 1.6 Schnittpunkte zweier Funktionsgraphen graphisch und rechnerisch ermitteln und im Kontext interpretieren können.
FA 1.7 Funktionen als mathematische Modelle verstehen und damit verständig arbeiten können.
FA 1.8 Durch Gleichungen (Formeln) gegebene Funktionen mit mehreren Veränderlichen im Kontext deuten können, Funktionswerte ermitteln können.
FA 1.9 Einen Überblick über die wichtigsten (unten angeführten) Typen mathematischer Funktionen geben, ihre Eigenschaften vergleichen können.

Auf eine sichere Unterscheidung zwischen funktionalen und nichtfunktionalen Zusammenhängen wird Wert gelegt, auf theoretisch bedeutsame Eigenschaften (zB Injektivität, Surjektivität, Umkehrbarkeit) wird aber nicht fokussiert. Im Vordergrund steht die Rolle von Funktionen als Modelle und die verständige Nutzung grundlegender Funktionstypen und deren Eigenschaften sowie der verschiedenen Darstellungsformen von Funktionen (auch $f\colon A \to B,\ x \mapsto f(x)$).
Die Bearbeitung von Funktionen mit mehreren Veränderlichen beschränkt sich auf die Interpretation der Funktionsgleichung im jeweiligen Kontext sowie auf die Ermittlung von Funktionswerten.
Das rechnerische Ermitteln von Schnittpunkten von Funktionen beschränkt sich auf jene Fälle, die durch die im Inhaltsbereich Algebra und Geometrie angeführten Grundkompetenzen abgedeckt sind (lineare, quadratische Gleichungen).
Der Verlauf von Funktionen soll nicht nur mathematisch beschrieben, sondern auch im jeweiligen Kontext gedeutet werden können.

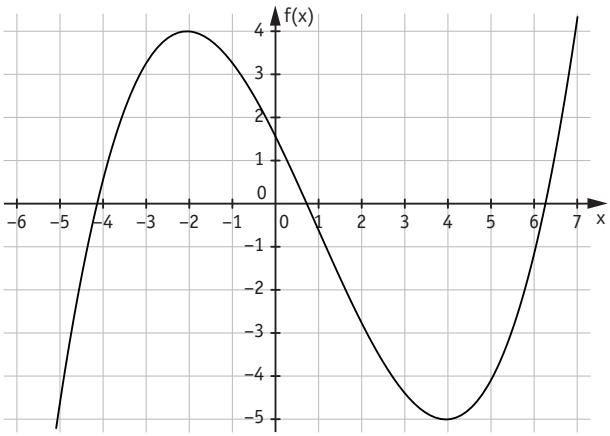
3 **FA 1.5** Die Abbildung zeigt den Graphen einer Polynomfunktion f.
Gib das Monotonieverhalten von f im Intervall [–5; 7] an!

f ist monoton steigend in:

_____

f ist monoton fallend in:

_____



© VERITAS-Verlag, Linz. DURCHSTARTEN ZUR AHS-MATURA MATHEMATIK. Alle Rechte vorbehalten

FA 2 Lineare Funktionen $f(x) = k \cdot x + d$

FA 1.1 Verbal, tabellarisch, graphisch oder durch eine Gleichung (Formel) gegebene lineare Zusammenhänge als lineare Funktionen erkennen bzw. betrachten können; zwischen diesen Darstellungsformen wechseln können.

FA 2.2 Aus Tabellen, Graphen und Gleichungen linearer Funktionen Werte(paare) sowie die Parameter k und d ermitteln und im Kontext deuten können.

FA 2.3 Die Wirkung der Parameter k und d kennen und die Parameter in unterschiedlichen Kontexten deuten können.

FA 2.4 Charakteristische Eigenschaften kennen und im Kontext deuten können:
$f(x + 1) = f(x) + k$; $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = k = [f'(x)]$

FA 2.5 Die Angemessenheit einer Beschreibung mittels linearer Funktion bewerten können.

FA 2.6 Direkte Proportionalität als lineare Funktion vom Typ $f(x) = k \cdot x$ beschreiben können.

Anmerkung: Die Parameter k und d sollen sowohl für konkrete Werte als auch allgemein im jeweiligen Kontext interpretiert werden können. Entsprechendes gilt für die Wirkung der Parameter und deren Änderung.

4 **FA 2.4** Wie groß ist der Anstieg der Geraden, die durch die Punkte A(5|6) und B(–7|0) gelegt wird?

5 **FA 2.4** Wieso ist $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$ äquivalent zu $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}$?

6 **FA 2.4** Gegeben ist eine lineare Funktion f mit $f(x) = k \cdot x + d$ mit $d, k \in \mathbb{R}$.
Kreuze die zutreffenden Aussagen an!

A ☐	Der Differenzenquotient bei $x = 0$ ist gleich d.
B ☐	Wird x um 1 erhöht, so ändert sich der Funktionswert um k.
C ☐	Der Differenzenquotient ist überall gleich k.
D ☐	Der Differentialquotient ist überall gleich k.
E ☐	Der Differentialquotient ist an verschiedenen Stellen unterschiedlich groß.

© VERITAS-Verlag, Linz. DURCHSTARTEN ZUR AHS-MATURA MATHEMATIK. Alle Rechte vorbehalten

FA 4 Polynomfunktion $f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i \cdot x^i$ mit $n \in \mathbb{N}$

FA 4.1 Typische Verläufe von Graphen in Abhängigkeit vom Grad der Polynomfunktion (er)kennen.

FA 4.2 Zwischen tabellarischen und grafischen Darstellungen von Zusammenhängen dieser Art wechseln können.

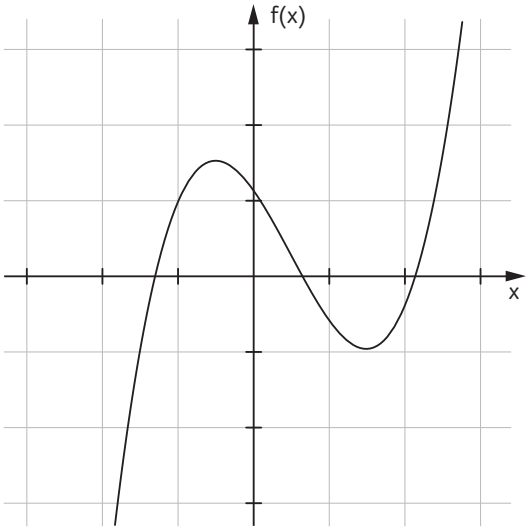
FA 4.3 Aus Tabellen, Graphen und Gleichungen von Polynomfunktionen Funktionswerte, aus Tabellen und Graphen sowie aus einer quadratischen Funktionsgleichung Argumente ermitteln können.

FA 4.4 Den Zusammenhang zwischen dem Grad der Polynomfunktion und der Anzahl der Null-, Extrem- und Wendestellen wissen.

Anmerkung: Der Zusammenhang zwischen dem Grad der Polynomfunktion und der Anzahl der Null-, Extrem- und Wendestellen sollte für beliebige n bekannt sein, konkrete Aufgabenstellungen beschränken sich auf Polynomfunktionen mit $n \leq 4$.
Argumentwerte sollen aus Tabellen und Graphen, für Polynomfunktionen bis $n = 2$ und solchen, die sich durch einfaches Herausheben oder einfache Substitution auf quadratische Funktionen zurückführen lassen, auch aus der jeweiligen Funktionsgleichung ermittelt werden können.

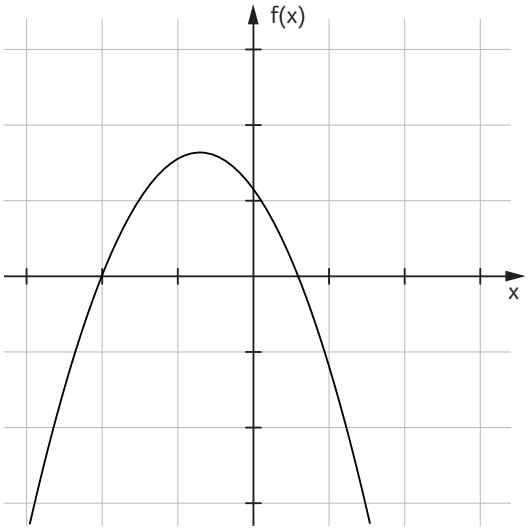
7 **FA 4.1** Gib zu den Funktionsgraphen den jeweiligen Grad der Polynomfunktion an!

A



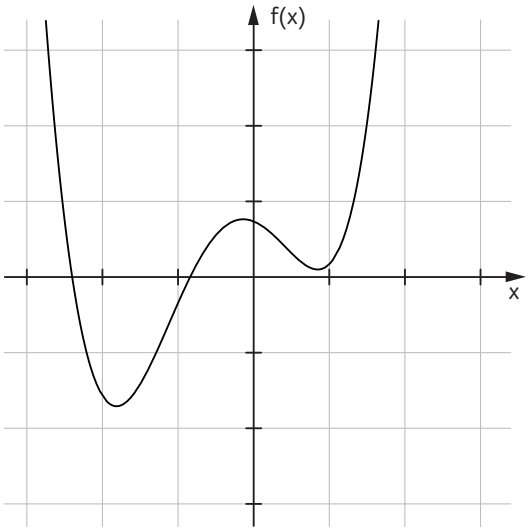
Grad: _____

B



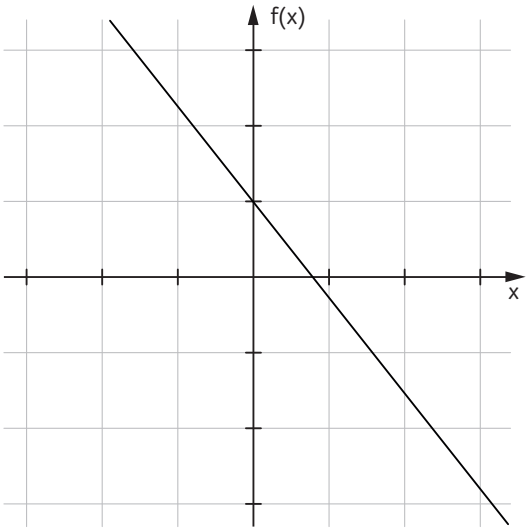
Grad: _____

C



Grad: _____

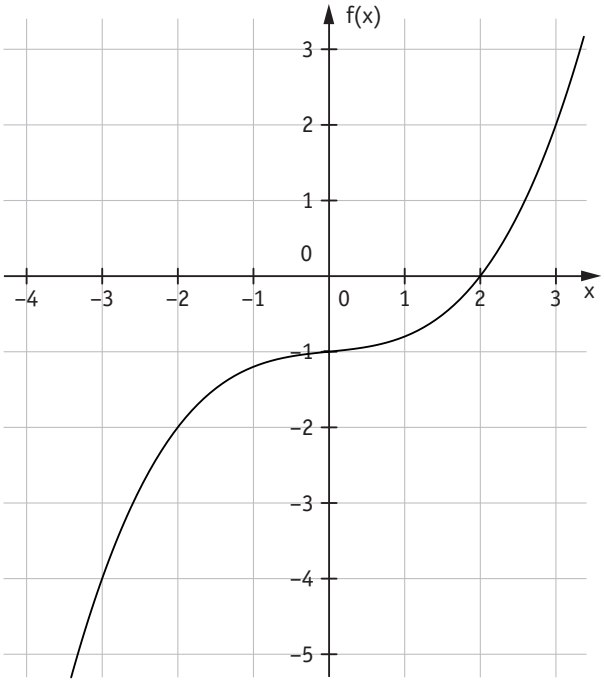
D



Grad: _____

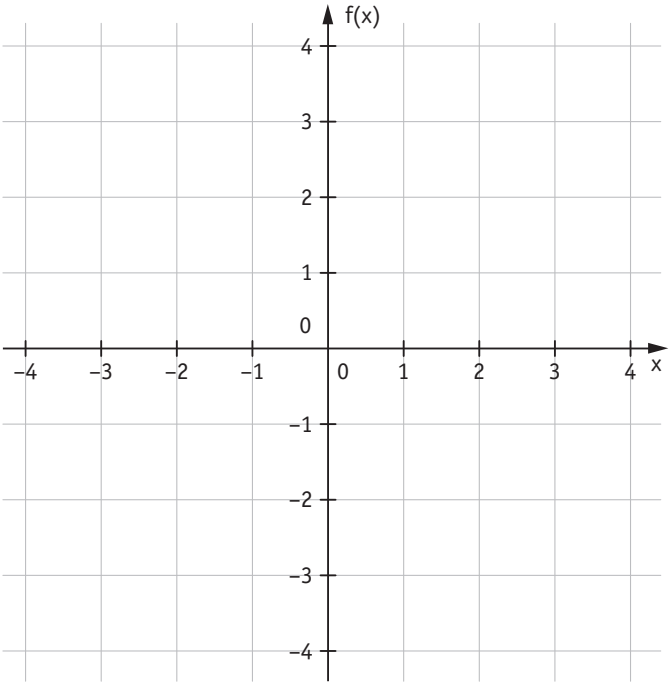
© VERITAS-Verlag, Linz. DURCHSTARTEN ZUR AHS-MATURA MATHEMATIK. Alle Rechte vorbehalten

8 **FA 4.2** Eine Polynomfunktion f mit $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a, b, c, d \in \mathbb{R}$) ist durch ihren Graphen gegeben. Gib für das Intervall [-3; 3] eine Wertetabelle an!



x	–3	–2	–1	0	1	2	3
f(x)							

9 **FA 4.3** Skizziere den Graphen der Funktion $f(x) = x \cdot (x - 2) \cdot (x + 2)$.
Kennzeichne die Nullstellen der Kurve und gib die Anzahl der Extremstellen an.

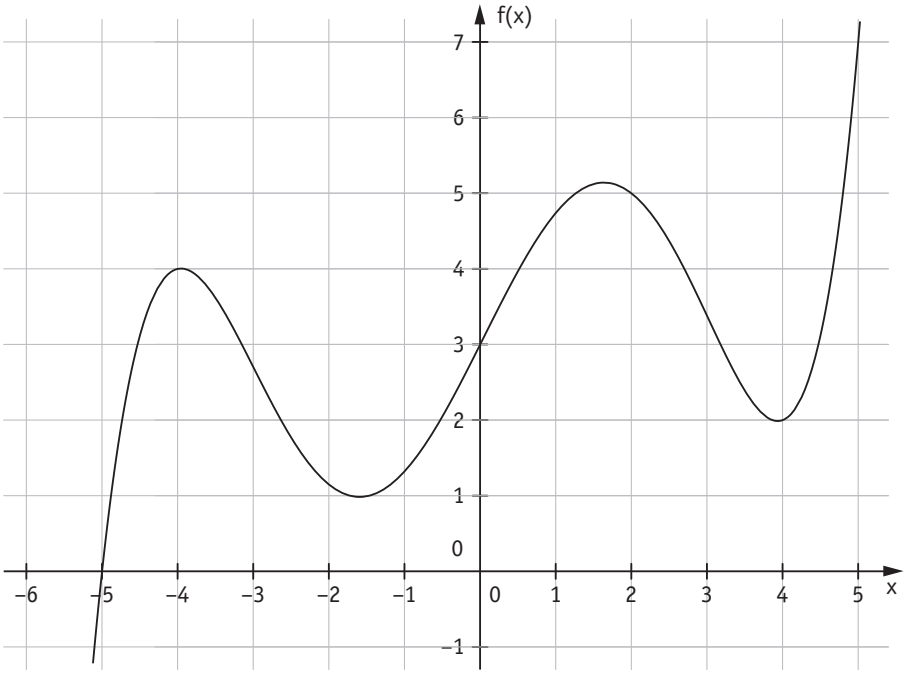


Anzahl der Extremstellen: _____

© VERITAS-Verlag, Linz. DURCHSTARTEN ZUR AHS-MATURA MATHEMATIK. Alle Rechte vorbehalten

10 **FA 4.4** Gegeben ist die Polynomfunktion 3. Grades $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$.
Wie viele reelle Nullstellen kann diese Funktion besitzen?
Belege jeden möglichen Lösungsfall durch eine passende Skizze!

11 **FA 4.4** Gegeben ist der Graph einer Polynomfunktion f 5. Grades.



Kreuze an, welche Eigenschaften für die angegebene Funktion zutreffen.

A ☐	f ist im Intervall [0; 1] streng monoton steigend
B ☐	x = –4 ist eine lokale Maximumstelle
C ☐	f ist im Intervall [-5; 5] monoton steigend
D ☐	f hat fünf Nullstellen
E ☐	f hat 4 lokale Extremstellen

© VERITAS-Verlag, Linz. DURCHSTARTEN ZUR AHS-MATURA MATHEMATIK. Alle Rechte vorbehalten

FA 5 Exponentialfunktion $f(x) = a \cdot b^x$ bzw. $f(x) = a \cdot e^{\lambda \cdot x}$ mit $a, b \in \mathbb{R}^+$, $\lambda \in \mathbb{R}$

FA 5.1 Verbal, tabellarisch, grafisch oder durch eine Gleichung (Formel) gegebene exponentielle Zusammenhänge als Exponentialfunktion erkennen bzw. betrachten können; zwischen diesen Darstellungsformen wechseln können.

FA 5.2 Aus Tabellen, Graphen und Gleichungen von Exponentialfunktionen Werte(paare) ermitteln und im Kontext deuten können.

FA 5.3 Die Wirkung der Parameter a und b (bzw. e^{λ}) kennen und die Parameter in unterschiedlichen Kontexten deuten können.

FA 5.4 Charakteristische Eigenschaften ($f(x + 1) = b \cdot f(x)$; $[e^x]' = e^x$) kennen und im Kontext deuten können.

FA 5.5 Die Begriffe Halbwertszeit und Verdoppelungszeit kennen, die entsprechenden Werte berechnen und im Kontext deuten können.

FA 5.6 Die Angemessenheit einer Beschreibung mittels Exponentialfunktion bewerten können.

Anmerkung: Die Parameter a und b (bzw. e^{λ}) sollen sowohl für konkrete Werte als auch allgemein im jeweiligen Kontext interpretiert werden können. Entsprechendes gilt für die Wirkung der Parameter und deren Änderung.

12 **FA 5.3** Das Wachstum einer Bakterienkolonie in Abhängigkeit von der Zeit t (in Stunden) kann näherungsweise durch die Funktionsgleichung $N(t) = 500 \cdot 1{,}24^t$ beschrieben werden, wobei N(t) die zum Zeitpunkt t besiedelte Fläche (in mm²) angibt. Interpretiere die in der Funktionsgleichung vorkommenden Werte 500 und 1,24 im Hinblick auf den Wachstumsprozess!

13 **FA 5.4** Gegeben ist die Funktionsgleichung $f(x) = e^{-0{,}3x}$.
Ermittle die Gleichung der Ableitungsfunktion von f!

$f'(x) =$ _____

© VERITAS-Verlag, Linz. DURCHSTARTEN ZUR AHS-MATURA MATHEMATIK. Alle Rechte vorbehalten

FA 6 Sinusfunktion, Cosinusfunktion

FA 5.1 Grafisch oder durch eine Gleichung (Formel) gegebene Zusammenhänge der Art $f(x) = a \cdot \sin(b \cdot x)$ als allgemeine Sinusfunktion erkennen bzw. betrachten können; zwischen diesen Darstellungsformen wechseln können.

FA 6.2 Aus Graphen und Gleichungen von allgemeinen Sinusfunktionen Werte(paare) ermitteln und im Kontext deuten können.

FA 6.3 Die Wirkung der Parameter a und b kennen und die Parameter im Kontext deuten können.

FA 6.4 Periodizität als charakteristische Eigenschaft kennen und im Kontext deuten können.

FA 6.5 Wissen, dass $\cos(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$.

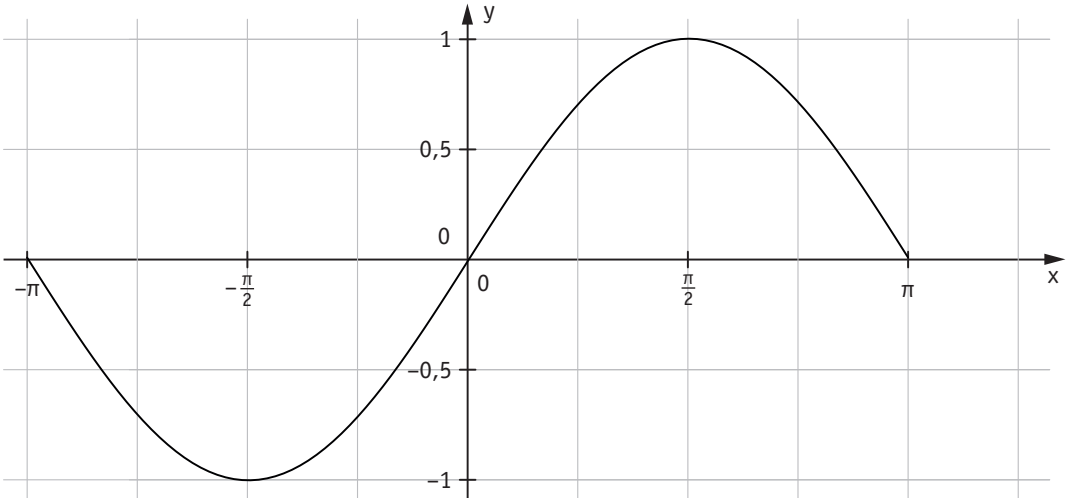
FA 6.6 Wissen, dass gilt: $[\sin(x)]' = \cos(x)$, $[\cos(x)]' = -\sin(x)$

Anmerkung: Während zur Auflösung von rechtwinkeligen Dreiecken Sinus, Cosinus und Tangens verwendet werden, beschränkt sich die funktionale Betrachtung (weitgehend) auf die allgemeine Sinusfunktion. Wesentlich dabei sind die Interpretation der Parameter (im Graphen wie auch in entsprechenden Kontexten) sowie der Verlauf des Funktionsgraphen und die Periodizität.

14 **FA 6.6** Gegeben ist die Funktionsgleichung $f(x) = \frac{1}{3} \cdot \sin(3x)$.
Ermittle die Gleichung der Ableitungsfunktion von f!

$f'(x) =$ _____

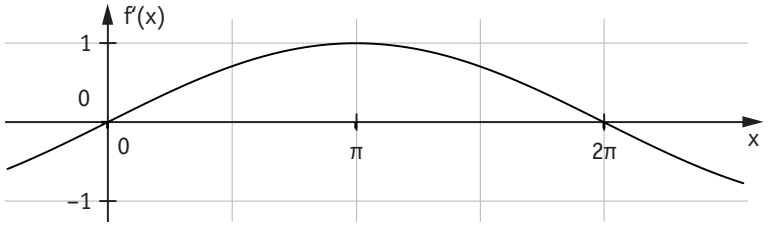
15 **FA 6.6** In der Abbildung ist der Graph der Sinusfunktion f mit $f(x) = \sin(x)$ im Intervall $[-\pi; \pi]$ dargestellt.
Zeichne die 1. Ableitungsfunktion von f im Intervall $[-\pi; \pi]$ in das Koordinatensystem ein!



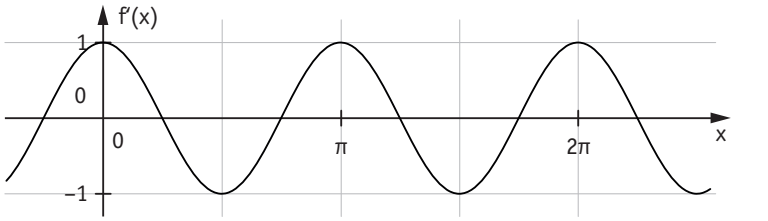
© VERITAS-Verlag, Linz. DURCHSTARTEN ZUR AHS-MATURA MATHEMATIK. Alle Rechte vorbehalten

16 **FA 6.6** Gegeben ist die Funktion f mit f(x) = sin(x).
Kreuze von den gegebenen Graphen von Ableitungsfunktionen f' denjenigen an, der zur Funktion f gehört.

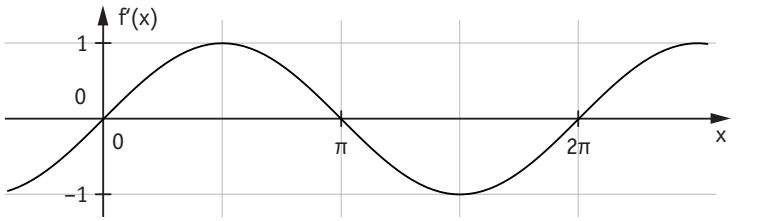
A ☐



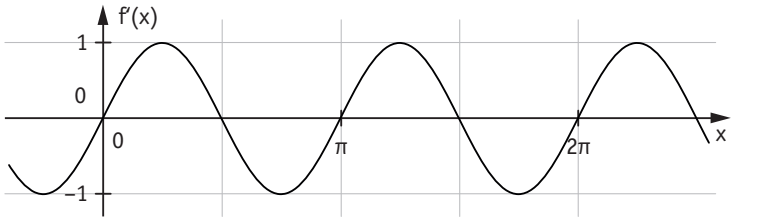
B ☐



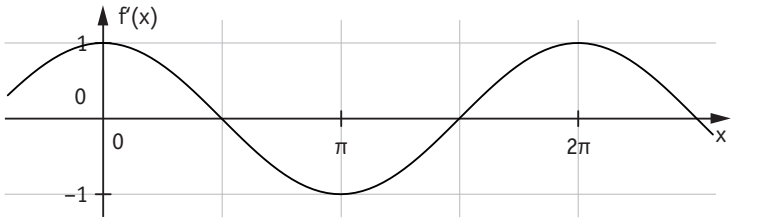
C ☐



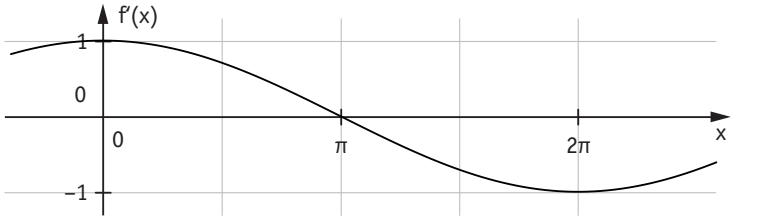
D ☐



E ☐



F ☐



© VERITAS-Verlag, Linz. DURCHSTARTEN ZUR AHS-MATURA MATHEMATIK. Alle Rechte vorbehalten

3 ANALYSIS

AN 1 Änderungsmaße

AN 1.1 Absolute und relative (prozentuelle) Änderungsmaße unterscheiden und angemessen verwenden können.

Anmerkung: Die Berechnung einfacher Differenzenquotienten ist/wird damit auch umsetzbar/möglich.

AN 1.2 Den Zusammenhang Differenzenquotient (mittlere Änderungsrate) – Differentialquotient („momentane" Änderungsrate) auf der Grundlage eines intuitiven Grenzwertbegriffes kennen und damit (verbal sowie in formaler Schreibweise) auch kontextbezogen anwenden können.

AN 1.3 Den Differenzen- und Differentialquotienten in verschiedenen Kontexten deuten und entsprechende Sachverhalte durch den Differenzen- bzw. Differentialquotienten beschreiben können.

AN 1.4 Das systemdynamische Verhalten von Größen durch Differenzengleichungen beschreiben bzw. diese im Kontext deuten können.

Anmerkung: Der Fokus liegt auf dem Darstellen von Änderungen durch Differenzen von Funktionswerten, durch prozentuelle Veränderungen, durch Differenzquotienten und durch Differentialquotienten, ganz besonders aber auch auf der Interpretation dieser Veränderungsmaße im jeweiligen Kontext. Die Ermittlung des Differentialquotienten aus Funktionsgleichungen beschränkt sich auf Polynomfunktionen, Potenzfunktionen sowie auf die Fälle $[\sin(k \cdot x)]' = k \cdot \cos(k \cdot x)$, $[\cos(k \cdot x)]' = -k \cdot \sin(k \cdot x)$ und $[e^{kx}]' = k \cdot e^{kx}$.

17 **AN 1.2** Gib drei verschiedene Funktionen an, deren Differenzenquotient im Intervall [0; 1] genau 1 beträgt!

$f_1(x) =$ _____

$f_2(x) =$ _____

$f_3(x) =$ _____

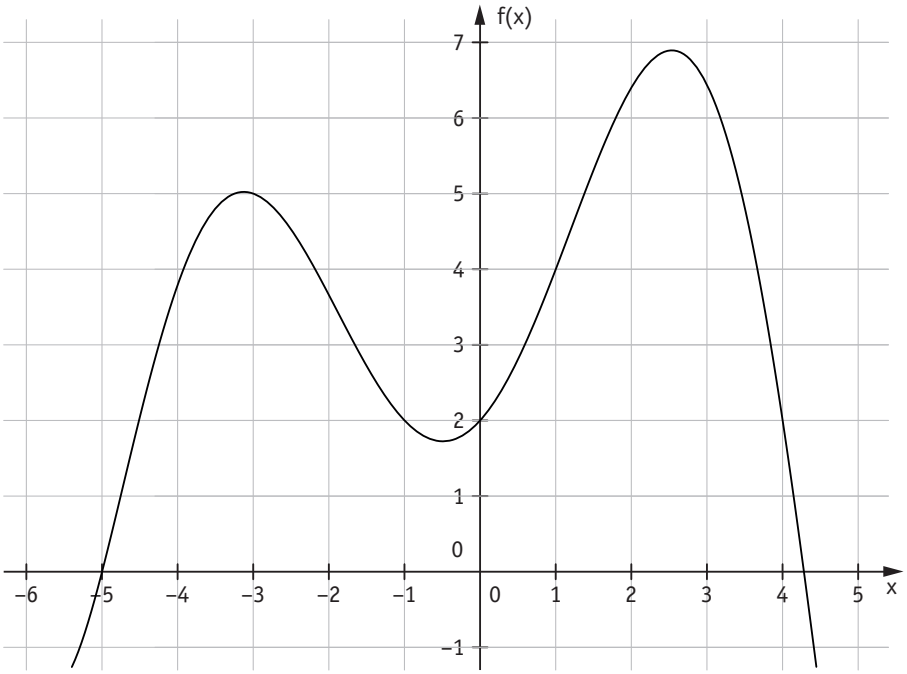
18 **AN 1.2** Gegeben ist die Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}: f(x) = x^2 - 2$.
Ermittle die folgenden Änderungsmaße der Funktion f:

Der Differenzenquotient der Funktion f im Intervall [0; 2] beträgt: _____

Der Differentialquotient der Funktion f an der Stelle 3 beträgt: _____

© VERITAS-Verlag, Linz. DURCHSTARTEN ZUR AHS-MATURA MATHEMATIK. Alle Rechte vorbehalten

19 **AN 1.2** Gegeben ist der Graph einer Polynomfunktion f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.



Kreuze die für diese Funktion f zutreffenden Aussagen an!

A ☐	Der Differenzenquotient im Intervall [0; 1] ist 2.
B ☐	Der Differenzenquotient im Intervall [-3; 1] ist positiv.
C ☐	Der Differentialquotient an der Stelle 1 ist positiv.
D ☐	Der Differentialquotient an der Stelle –5 ist kleiner als der Differentialquotient an der Stelle –4.
E ☐	Der Differentialquotient an der Stelle –1 ist (ungefähr) gleich groß wie der Differentialquotient an der Stelle 1.

20 **AN 1.3** Gegeben ist folgende Tabelle, welche die Temperatur zu einer bestimmten Uhrzeit angibt:

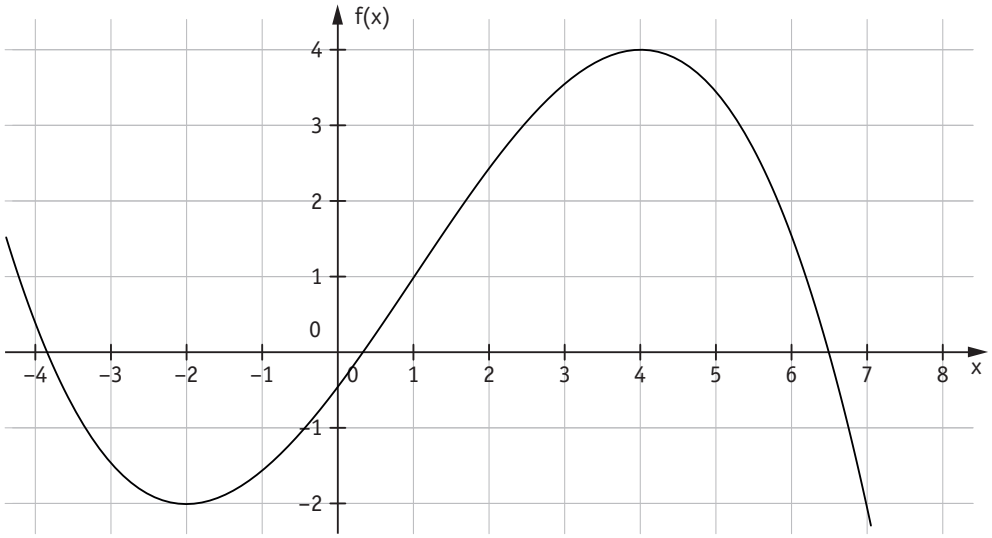
Uhrzeit	Temperatur in °C
8	9
10	10
12	13
14	17
16	14
18	13

Gib die Temperaturänderung im Intervall [8; 12] und im Intervall [12; 14] an!
In welchem der beiden Zeitintervalle wächst die Temperatur stärker? Begründe!

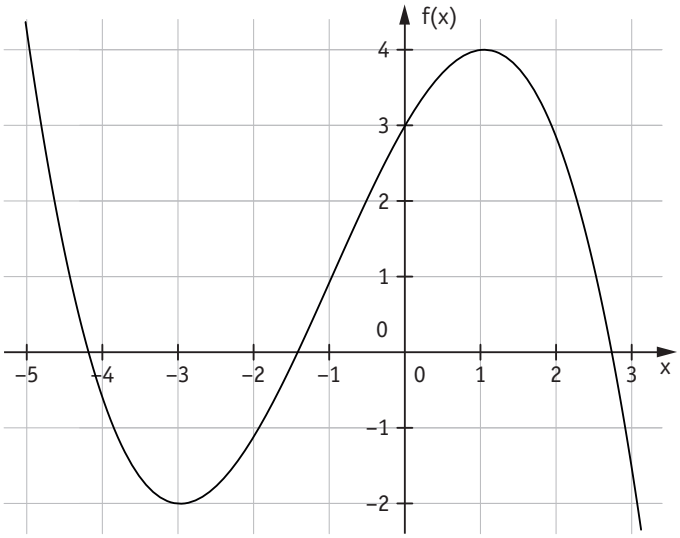
© VERITAS-Verlag, Linz. DURCHSTARTEN ZUR AHS-MATURA MATHEMATIK. Alle Rechte vorbehalten

21 **AN 1.3** Eine Kugel wird von der Dachkante eines 140 m hohen Gebäudes mit der Abschussgeschwindigkeit 60 m/s senkrecht nach oben geschossen. Nach t Sekunden hat sie die Höhe $s(t) = 140 + 60t - 5t^2$ erreicht (s im Meter, t in Sekunden).
Wie groß ist die mittlere Geschwindigkeit der Kugel in den ersten 5 Sekunden?
Wie groß ist die Geschwindigkeit der Kugel nach 5 Sekunden?

22 **AN 1.3** Die Abbildung zeigt den Graphen einer Funktion f.
Ermittle grafisch die momentane Änderungsrate von f an der Stelle x = 6 und gib den Wert möglichst genau an!



23 **AN 1.3** Die Abbildung zeigt den Graphen einer Funktion f.
Berechne den Differenzenquotienten von f im Intervall [–3; 1] und gib eine geometrische Interpretation des Ergebnisses an!



© VERITAS-Verlag, Linz. DURCHSTARTEN ZUR AHS-MATURA MATHEMATIK. Alle Rechte vorbehalten

AN 2 Regeln für das Differenzieren

AN 2.1 Einfache Regeln des Differenzierens kennen und anwenden können: Potenzregel, Summenregel, Regeln für $[k \cdot f(x)]'$ und $[f(k \cdot x)]'$ (vgl. Inhaltsbereich Funktionale Abhängigkeiten).

Anmerkung: Im Teil Vernetzung von Grundkompetenzen können mit Hilfe technologischer Werkzeuge auch komplexere Differentiationsmethoden angewandt und umgesetzt werden.

24 **AN 2.1** Gegeben sind vier Funktionen und sechs Ableitungsfunktionen.
Ordne den Funktionen f die richtigen Ableitungsfunktionen f' zu.

$f(x) = x^3$	A
$f(x) = \frac{1}{x^2}$	B
$f(x) = \sqrt{x^3}$	C
$f(x) = \sqrt[3]{x^2}$	D

1	$f'(x) = -2 \cdot x^{-3}$
2	$f'(x) = \frac{2}{3 \cdot \sqrt[3]{x}}$
3	$f'(x) = \frac{3}{2} \cdot \sqrt{x}$
4	$f'(x) = \frac{3}{x^2}$
5	$f'(x) = 3 \cdot x^2$
6	$f'(x) = \frac{2}{3} \cdot \sqrt[3]{x}$

25 **AN 2.1** Berechne die 1. Ableitung der Funktion $f(x) = \frac{x^4}{4} - x + 5 - \frac{3}{x}$.

$f'(x) =$ _____

26 **AN 2.1** Eine Funktion ist durch ihre Gleichung gegeben: $f(x) = e^{-2x} - 3 \cdot \sin x$.
Gib die 1. Ableitung an!

$f'(x) =$ _____

27 **AN 2.1** Eine Funktion ist durch ihre Gleichung gegeben: $f(x) = (4x^2 + 1) \cdot \sqrt{x}$.
Berechne die 1. Ableitung!

$f'(x) =$ _____

© VERITAS-Verlag, Linz. DURCHSTARTEN ZUR AHS-MATURA MATHEMATIK. Alle Rechte vorbehalten

AN 3 Ableitungsfunktion/Stammfunktion

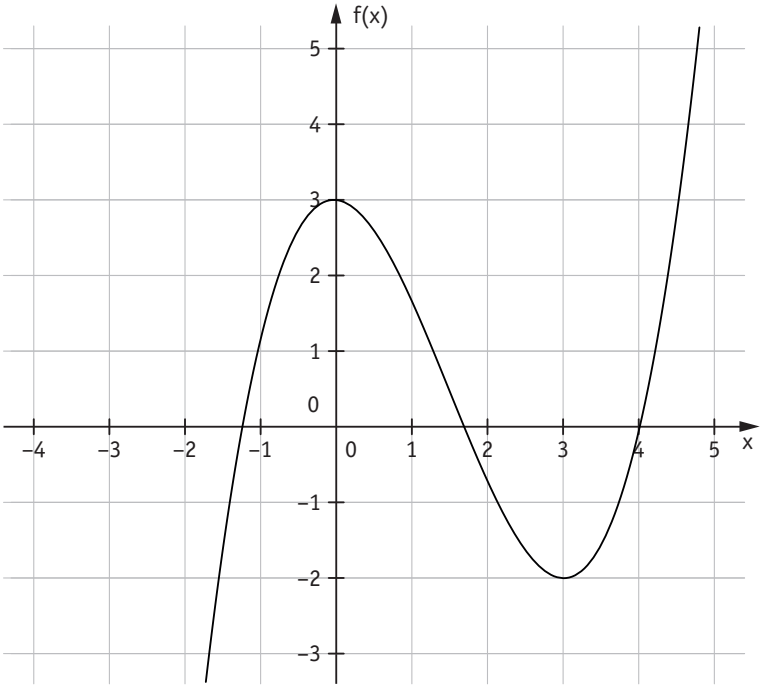
AN 3.2 Den Begriff Ableitungsfunktion/Stammfunktion kennen und zur Beschreibung von Funktionen einsetzen können.

AN 3.2 Den Zusammenhang zwischen Funktion und Ableitungsfunktion (bzw. Funktion und Stammfunktion) in deren grafischer Darstellung (er)kennen und beschreiben können.

AN 3.3 Eigenschaften von Funktionen mit Hilfe der Ableitung(sfunktion) beschreiben können: Monotonie, lokale Extrema, Links- und Rechtskrümmung, Wendestellen.

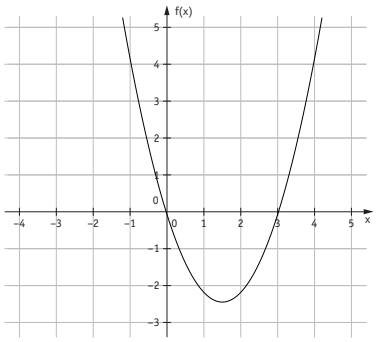
Anmerkung: Der Begriff der Ableitung(sfunktion) soll verständig und zweckmäßig zur Beschreibung von Funktionen eingesetzt werden.

28 **AN 3.2** Gegeben ist der Graph der Polynomfunktion f:

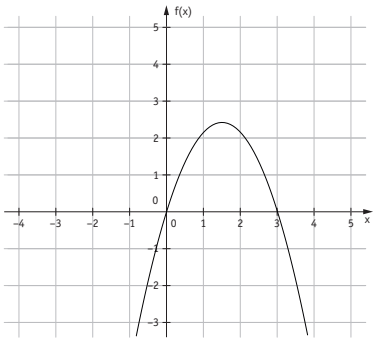


Einer der drei unten gezeichneten Graphen stellt die Ableitungsfunktion von f dar. Streiche die beiden anderen Graphen durch und begründe, warum diese beiden Graphen auszuschließen sind.

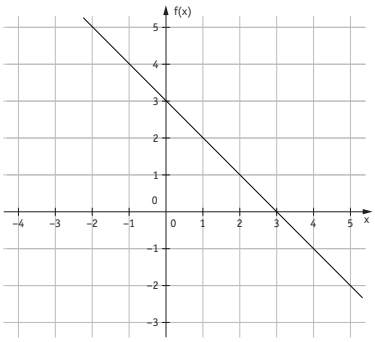
A



B



C

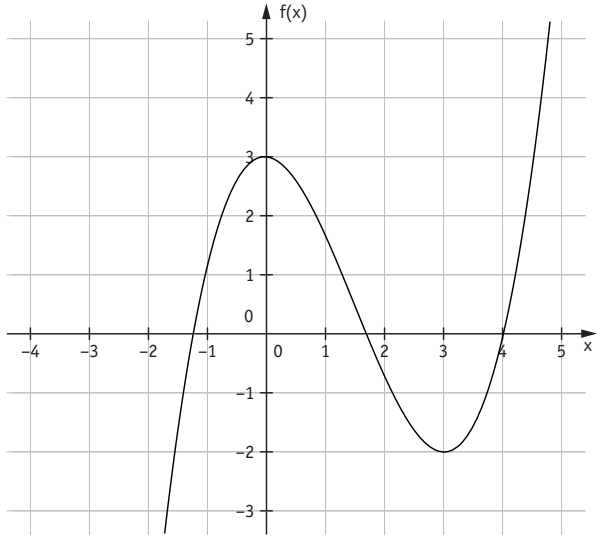


Begründung:

Begründung:

Begründung:

29 **AN 3.2** Gegeben sind die graphische Darstellung einer Polynomfunktion dritten Grades sowie drei Aussagen, die sich auf die erste Ableitungsfunktion dieser Polynomfunktion beziehen.



Aussage 1: Die erste Ableitungsfunktion hat Nullstellen bei 0 und 3.

Aussage 2: Die erste Ableitungsfunktion ist eine quadratische Funktion.

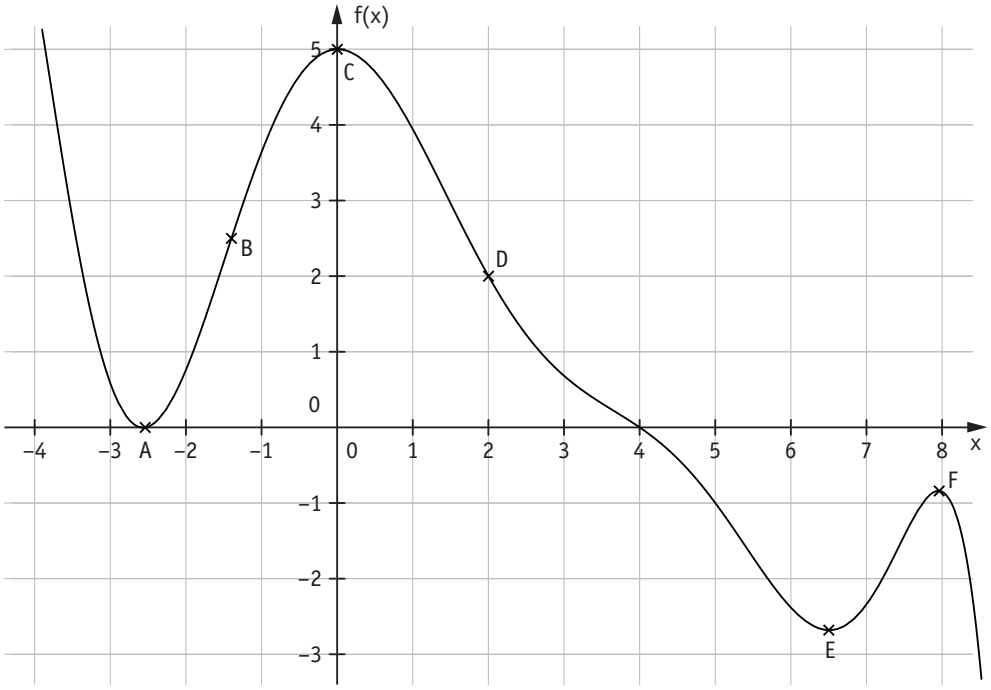
Aussage 3: Die erste Ableitungsfunktion hat eine Wendestelle.

Eine dieser drei Aussagen ist falsch. Streiche diese falsche Aussage durch und berichtige die falsche Aussage!

Aussage _____ : Die erste Ableitungsfunktion _____

_____

30 **AN 3.2** Gegeben ist der Graph einer Funktion f.



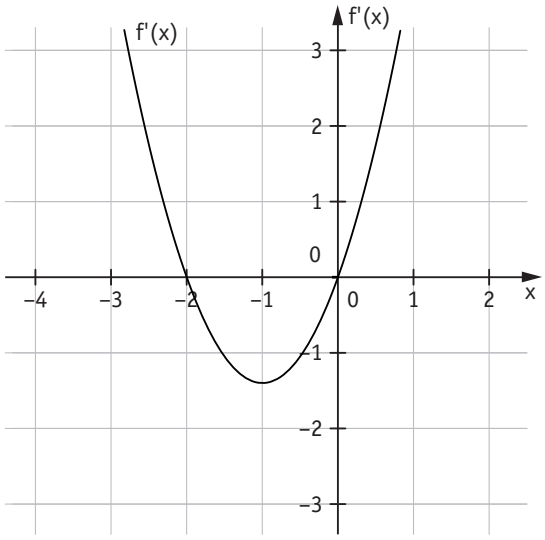
Die angegebenen Eigenschaften legen jeweils einen der markierten Punkte fest.
Ordne zu!

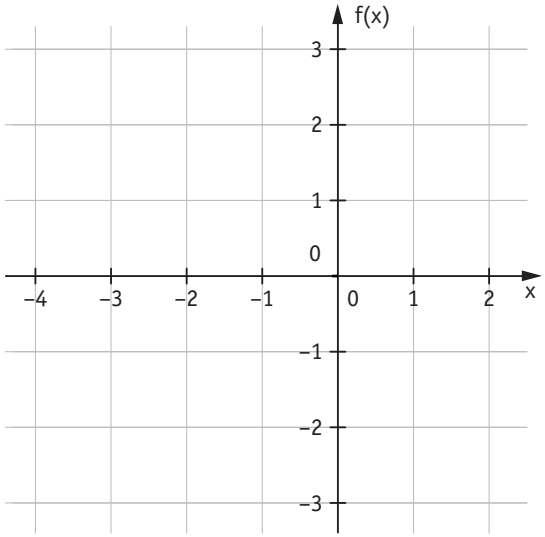
$f(x_1) < 0,\ f'(x_1) = 0,\ f''(x) < 0$	A
$f(x_1) > 0,\ f'(x_1) > 0,\ f''(x) = 0$	B
$f(x_1) = 0,\ f'(x_1) = 0,\ f''(x) > 0$	C
$f(x_1) > 0,\ f'(x_1) = 0,\ f''(x) < 0$	D

1	Punkt A
2	Punkt B
3	Punkt C
4	Punkt D
5	Punkt E
6	Punkt F

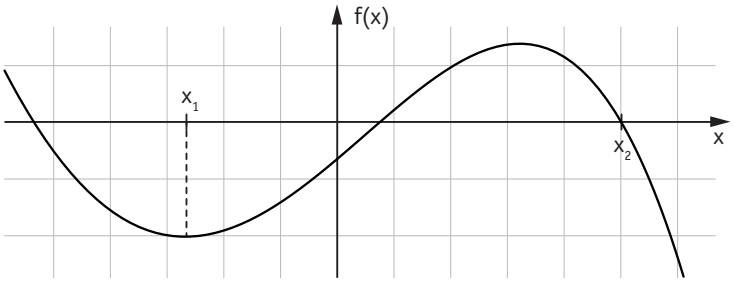
© VERITAS-Verlag, Linz. DURCHSTARTEN ZUR AHS-MATURA MATHEMATIK. Alle Rechte vorbehalten

31 **AN 3.3** Zeichne den Graphen der Funktion f, deren Graph der ersten Ableitung f'(x) gegeben ist. Kennzeichne die kritischen Punkte (Nullstellen, Extremwerte, Wendepunkte) der Funktion f!





32 **AN 3.3** Die Abbildung zeigt den Graphen der Funktion f.
Was kann aus der Abbildung über die erste bzw. zweite Ableitung von f an den Stellen x_1 und x_2 ausgesagt werden? Ergänze mit „< 0“, „= 0“ oder „> 0“.



$f'(x_1)$ _____

$f''(x_1)$ _____

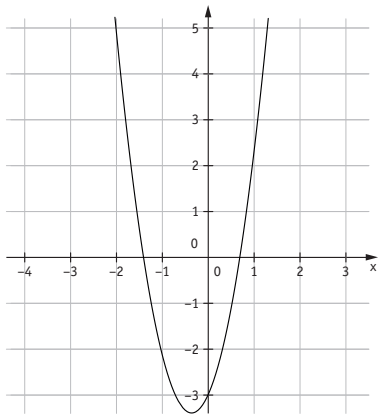
$f'(x_2)$ _____

$f''(x_2)$ _____

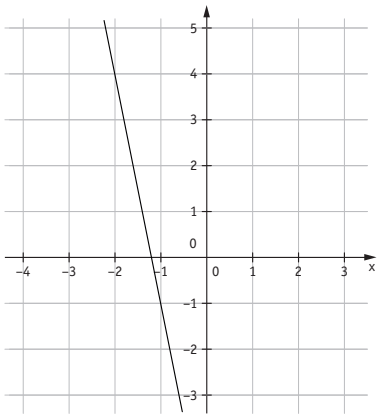
© VERITAS-Verlag, Linz. DURCHSTARTEN ZUR AHS-MATURA MATHEMATIK. Alle Rechte vorbehalten

33 **AN 3.3** In der folgenden Abbildung sind drei Funktionen f(x), g(x) und h(x) sowie deren erste und zweite Ableitung zu sehen. Beschrifte die entsprechenden Graphen mit f(x), f'(x), f''(x) etc.

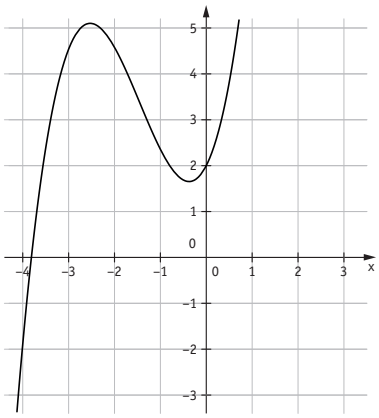
A



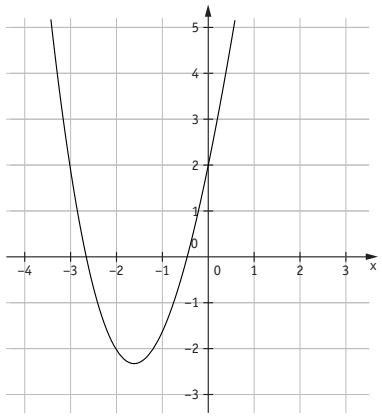
B



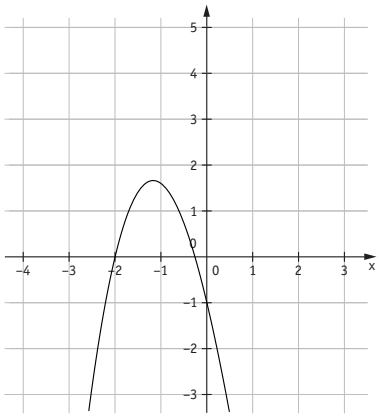
C



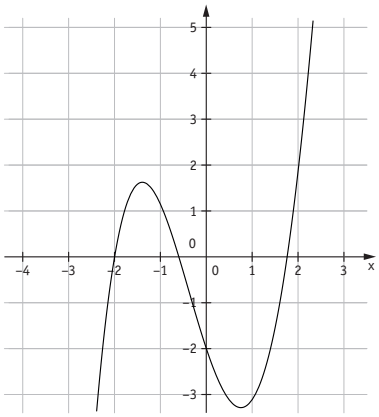
D



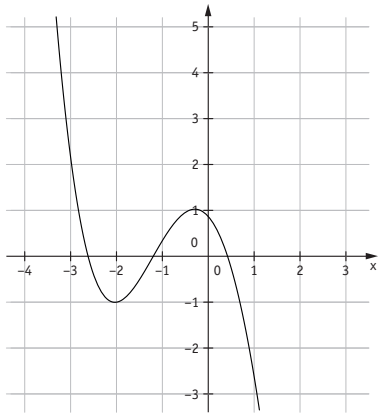
E



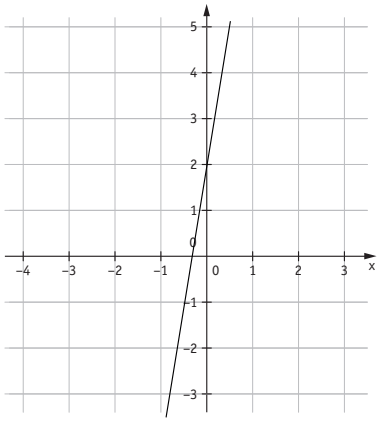
F



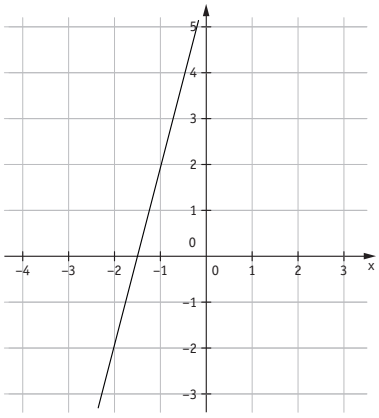
G



H



I



© VERITAS-Verlag, Linz. DURCHSTARTEN ZUR AHS-MATURA MATHEMATIK. Alle Rechte vorbehalten

WS 2 Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung

WS 2.1 Grundraum und Ereignisse in angemessenen Situationen verbal bzw. formal angeben können.
WS 2.2 Relative Häufigkeit als Schätzwert von Wahrscheinlichkeit verwenden und anwenden können.
WS 2.3 Wahrscheinlichkeit unter der Verwendung der Laplace-Annahme (Laplace-Wahrscheinlichkeit) berechnen und interpretieren können, Additionsregel und Multiplikationsregel anwenden und interpretieren können.

Anmerkung: Die Multiplikationsregel kann unter Verwendung der kombinatorischen Grundlagen und der Anwendung der Laplace-Regel (auch) umgangen werden.

WS 2.4 Binomialkoeffizient berechnen und interpretieren können.

34 **WS 2.4** Kreuze alle Binomialkoeffizienten an, die 1 ergeben:

A ☐	$\binom{n}{n}$	**D** ☐	$\binom{n}{k-1}$
B ☐	$\binom{n}{n-1}$	**E** ☐	$\binom{n}{0}$
C ☐	$\binom{n}{k}$	**F** ☐	$\binom{n}{1}$

35 **WS 2.4** Fülle die Lücken richtig aus!

Der Binomialkoeffizient ist definiert als $\binom{n}{k} =$ _____ und gibt an, auf wie viele Arten _____ Elemente aus _____ Elementen ausgewählt werden können. Dabei ist die Reihenfolge _____.

Es gilt $\binom{n}{0} = \binom{n}{\square}$ und $\binom{n}{1} = \binom{n}{\square}$. Mit dem Taschenrechner erhält man zB $\binom{10}{3} =$ _____.

© VERITAS-Verlag, Linz. DURCHSTARTEN ZUR AHS-MATURA MATHEMATIK. Alle Rechte vorbehalten

WS 3 Wahrscheinlichkeitsverteilung(en)

WS 3.1 Die Begriffe Zufallsvariable, (Wahrscheinlichkeits-)Verteilung, Erwartungswert und Standardabweichung verständig deuten und einsetzen können.

WS 3.2 Binomialverteilung als Modell einer diskreten Verteilung kennen – Erwartungswert sowie Varianz/Standardabweichung binomialverteilter Zufallsgrößen ermitteln können, Wahrscheinlichkeitsverteilung binomialverteilter Zufallsgrößen angeben können, Arbeiten mit der Binomialverteilung in anwendungsorientierten Bereichen.

WS 3.3 Situationen erkennen und beschreiben können, in denen mit Binomialverteilung modelliert werden kann.

WS 3.4 Normalapproximation der Binomialverteilung interpretieren und anwenden können.

Anmerkung: Kennen und Anwenden der Faustregel, dass die Normalapproximation der Binomialverteilung mit den Parametern n und p dann anzuwenden ist und gute Näherungswerte liefert, wenn die Bedingung $np(1 - p) \geq 9$ erfüllt ist. Die Anwendung der Stetigkeitskorrektur ist nicht notwendig und daher für Berechnungen im Zuge von Prüfungsbeispielen vernachlässigbar.
Kennen des Verlaufs der Dichtefunktion φ der Standardnormalverteilung mit Erwartungswert μ und Standardabweichung σ. Arbeiten mit der Verteilungsfunktion Φ der Standardnormalverteilung und korrektes Ablesen der entsprechenden Werte.

36 **WS 3.1** Berechne bei folgender Verteilung den Mittelwert, die Varianz und die Standardabweichung.

Anzahl der Züge im Mai, die an einem Tag Verspätung hatten	0	1	2	3	4	5	6	7
absolute Häufigkeit	78	35	14	16	9	12	6	1

37 **WS 3.2** B ist eine 15-0,3-binomialverteilte Zufallsgröße.
Berechne den Erwartungswert und die Standardabweichung von B!

38 **WS 3.2** Tamara hat für einen Geographietest genau 30 % der Fragen eines vorgegebenen Fragenkatalogs gelernt. Beim Test werden 8 Fragen gestellt. Bei vier oder mehr richtigen Antworten erhält man eine positive Note. Wie groß sind die Wahrscheinlichkeiten, dass Tamara einen negativen Test schreibt bzw. einen positiven Test schreibt?

© VERITAS-Verlag, Linz. DURCHSTARTEN ZUR AHS-MATURA MATHEMATIK. Alle Rechte vorbehalten

39 **WS 3.2** Für morgen werden in einer Klink fünf Geburten erwartet. Buben- und Mädchengeburten sind gleich wahrscheinlich. Der diensthabende Arzt möchte wissen, wie wahrscheinlich null, eine, zwei, drei, vier oder fünf Mädchengeburten sind.
Berechne die Wahrscheinlichkeiten und mache diese Wahrscheinlichkeiten in einem Stabdiagramm sichtbar.

40 **WS 3.3** Ein Versuch wird n-mal unter gleichen Bedingungen durchgeführt. Er erfüllt alle Voraussetzungen, um Wahrscheinlichkeiten mithilfe der Binomialverteilung zu berechnen.
Kreuze die korrekte(n) Aussage(n) an!

A ☐	Der Versuch wird n-mal wiederholt.
B ☐	Die Erfolgswahrscheinlichkeit p kann sich in jedem Versuch ändern.
C ☐	Das Ergebnis eines Durchgangs ist von den anderen Durchgängen abhängig.
D ☐	Die Zufallsvariable X gibt an, wie oft unter den n Versuchswiederholungen das Ereignis eintritt.
E ☐	In jedem Versuchsdurchgang gibt es nur zwei mögliche Ausgänge (Erfolg/Misserfolg).

41 **WS 3.4** Die Körpergrößen einer bestimmten Spinnenart werden normalverteilt angenommen mit einem Mittelwert $\mu = 4{,}7$ cm und einer Standardabweichung von $\sigma = 0{,}5$ cm.

Ergänze die fehlenden Zahlenwerte:

Rund 95 % dieser Spinnen sind zwischen _____ cm und _____ cm groß.

Rund _____ % dieser Spinnen sind kleiner als 4,7 cm.

Rund 20 % sind größer als _____ cm.

© VERITAS-Verlag, Linz. DURCHSTARTEN ZUR AHS-MATURA MATHEMATIK. Alle Rechte vorbehalten

LÖSUNGEN

1 A6, B4, C3, D2

2 A, C ankreuzen

3 f ist monoton steigend in: [–5; –2] und [4; 7]; f ist monoton fallend in: [–2; 4]

4 $k = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{0 - 6}{-7 - 5} = \frac{-6}{-12} = \frac{1}{2}$

5 $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{(-1) \cdot (-f(x_2) + f(x_1))}{(-1) \cdot (-x_2 + x_1)} = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}$

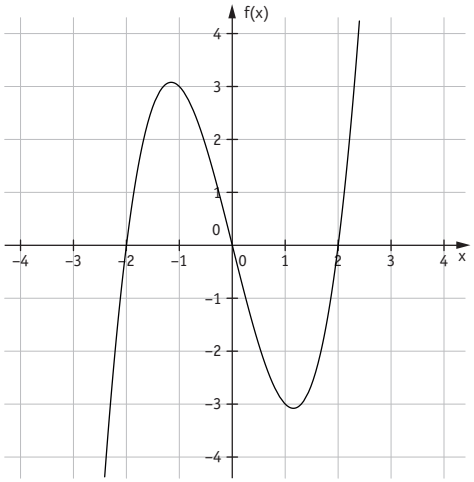
6 B, C, D ankreuzen

7 A Grad 3, B Grad 2, C Grad 4, D Grad 1

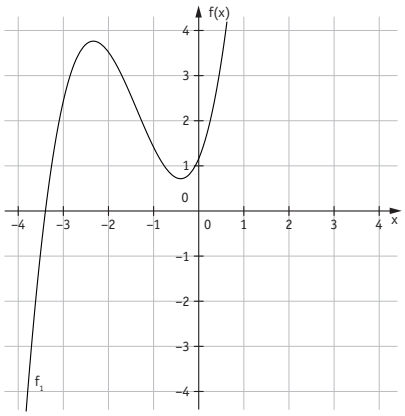
8

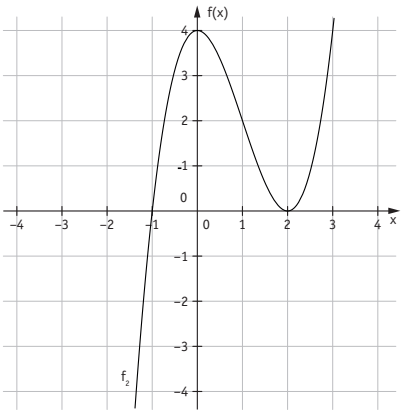
x	–3	–2	–1	0	1	2	3
f(x)	–4	–2	–1,2	–1	–0,8	0	2

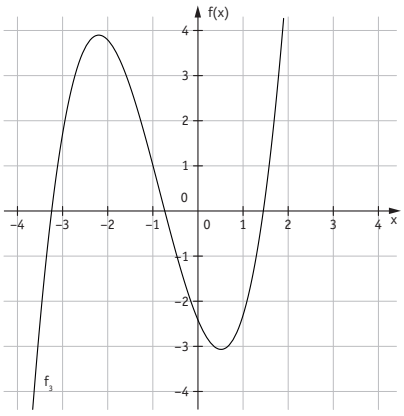
9 Anzahl der Extremstellen: 2; Nullstellen bei –2; 0; 2



10 Die Polynomfunktion dritten Grades kann entweder eine (f_1), zwei (f_2) oder drei (f_3) verschiedene reelle Nullstellen besitzen. Zum Beispiel:







11 A, B, E ankreuzen

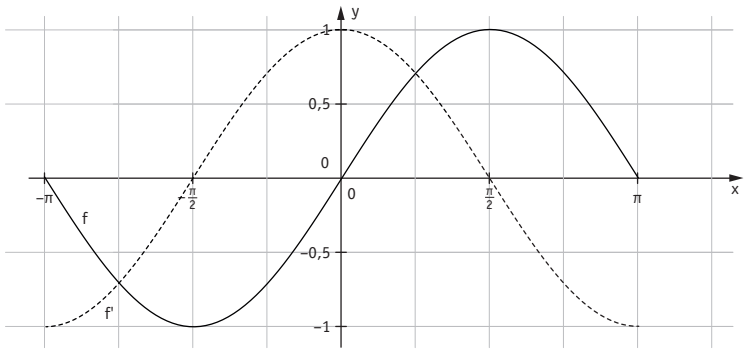
12 Zum Zeitpunkt t = 0 beträgt die besiedelte Fläche 500 mm². Die Bakterienkolonie wächst pro Stunde um 24 %.

13 $f'(x) = -0{,}3 \cdot e^{-0{,}3x}$

14 $f'(x) = \cos(3x)$

© VERITAS-Verlag, Linz. DURCHSTARTEN ZUR AHS-MATURA MATHEMATIK, 7. KLASSE. Alle Rechte vorbehalten

15



16 E ankreuzen

17 Zum Beispiel: $f_1(x) = x$, $f_2(x) = x + 2$, $f_3(x) = x^2$

18 Der Differenzenquotient der Funktion f im Intervall [0; 2] beträgt: 4. Der Differentialquotient der Funktion f an der Stelle 3 beträgt: 6

19 A, C ankreuzen

20 $T(12) - T(8) = 13 - 9 = 4$ °C; $T(14) - T(12) = 17 - 13 = 4$ °C

Im Intervall [12; 14] wächst die Temperatur stärker, denn $\frac{T(12) - T(8)}{12 - 8} = \frac{4}{4} = 1$ °C/h und $\frac{T(14) - T(12)}{14 - 12} = \frac{4}{2} = 2$ °C/h.

21 $v(t) = s'(t) = 60 - 10t$

Mittlere Geschwindigkeit in den ersten 5 Sekunden: $\frac{v(0) + v(5)}{2} = \frac{60 + 10}{2} = 35$ m/s

Geschwindigkeit der Kugel nach 5 Sekunden: $v(5) = 60 - 50 = 10$ m/s

22 $k \approx -2{,}7$

23 $k = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$; zB k ist die Steigung der Sekante durch die Punkte A(−3|−2) und B(1|4)

24 A5, B1, C3, D2

25 $f'(x) = x^3 - 1 - \frac{3}{x^2}$

26 $f'(x) = -2e^{-2x} - 3 \cdot \cos x$

27 $f'(x) = \frac{20x^2 + 1}{2\sqrt{x}}$

28 B und C sind auszuschließen.

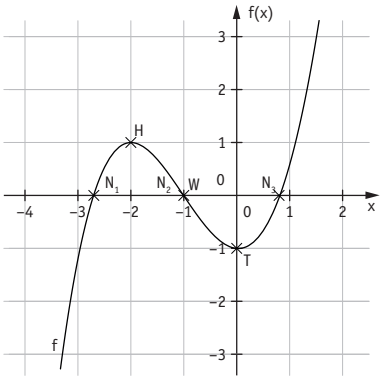
Begründung B: zB Der Graph der Funktion f hat im Wendepunkt W(1,5|0,5) negative Steigung, doch laut dieser Ableitungsfunktion wäre sie positiv.

Begründung C: zB f ist eine Polynomfunktion dritten Grades, f' muss daher vom Grad 2 sein. C ist eine Gerade, d.h. Grad 1.

29 Aussage 3: zB Die erste Ableitungsfunktion hat keine Wendestelle.

30 A6, B2, C1, D3

31



32 $f'(x_1) = 0$, $f''(x_1) > 0$, $f'(x_2) < 0$, $f''(x_2) < 0$

33 A f'(x), B g''(x), C h(x), D h'(x), E g'(x), F f(x), G g(x), H f''(x), I h''(x)

34 A, E ankreuzen

© VERITAS-Verlag, Linz. DURCHSTARTEN ZUR AHS-MATURA MATHEMATIK. Alle Rechte vorbehalten

35 Der Binomialkoeffizient ist definiert als $\binom{n}{k} = \frac{\mathbf{n!}}{\mathbf{k!(n-k)!}}$ und gibt an, auf wie viele Arten **k** Elemente aus **n** Elementen ausgewählt werden können. Dabei ist die Reihenfolge **unwichtig**. Es gilt $\binom{n}{0} = \binom{n}{\mathbf{n}}$ und $\binom{n}{1} = \binom{n}{\mathbf{n-1}}$.
Mit dem Taschenrechner erhält man zB $\binom{10}{3} = \mathbf{120}$.

36 $\bar{x} = 1{,}46$; $s^2 = 3{,}38$; $s = 1{,}84$

37 $n = 15$; $p = 0{,}3$; $\mu = n \cdot p = 4{,}5$; $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)} \approx 1{,}77$

38 X ... Anzahl der richtigen Antworten, $n = 8$; $p = 0{,}3$

$$P(\text{neg. Note}) = P(X \le 3) =$$
$$= P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) + P(X=3) =$$
$$= 0{,}7^8 + \underbrace{\binom{8}{1}}_{8} \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}7^7 + \underbrace{\binom{8}{2}}_{28} \cdot 0{,}3^2 \cdot 0{,}7^6 + \underbrace{\binom{8}{3}}_{56} \cdot 0{,}3^3 \cdot 0{,}7^5 \approx 0{,}8059$$

$$P(\text{pos. Note}) = P(X > 3) = 1 - P(X \le 3) \approx 0{,}1941$$

39 $P(X=0) = \binom{5}{0} \cdot 0{,}5^5 = \frac{1}{32} = 0{,}03125$

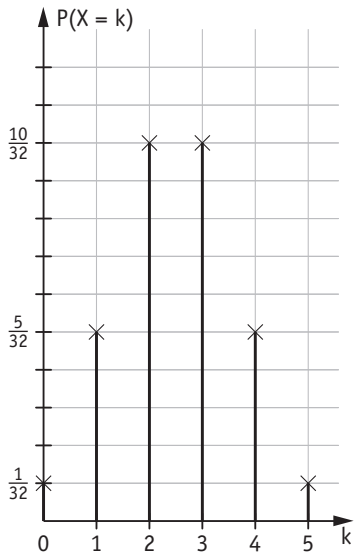
$P(X=1) = \binom{5}{1} \cdot 0{,}5^5 = \frac{5}{32} = 0{,}15625$

$P(X=2) = \frac{5}{16} = 0{,}3125$

$P(X=3) = \frac{5}{16} = 0{,}3125$

$P(X=4) = \frac{5}{32} = 0{,}15625$

$P(X=5) = \frac{1}{32} = 0{,}03125$



40 A, D, E ankreuzen

41 Rund 95 % dieser Spinnen sind zwischen 3,72 cm und 5,68 cm groß.
Rund 50 % dieser Spinnen sind kleiner als 4,7 cm.
Rund 20 % sind größer als 5,12 cm.

© VERITAS-Verlag, Linz. DURCHSTARTEN ZUR AHS-MATURA MATHEMATIK, 7. KLASSE. Alle Rechte vorbehalten

Algebraische Gleichungen und komplexe Zahlen

- Abspalten reeller Linearfaktoren von Polynomen
- Reflektieren über die Zweckmäßigkeit des Erweiterns der reellen Zahlen
- Rechnen mit komplexen Zahlen
- Kennenlernen des Fundamentalsatzes der Algebra

Differentialrechnung

- Definieren des Differentialquotienten (Änderungsrate), ausgehend vom Differenzenquotienten (mittlere Änderungsrate), Deuten dieser Begriffe als Sekantensteigung bzw. Tangentensteigung, weiteres Deuten in außermathematischen Bereichen
- Kennen des Begriffes Ableitungsfunktion, Berechnen von Ableitungen elementarer Funktionen
- Deuten der zweiten Ableitung in inner- und außermathematischen Bereichen
- Herleiten von Differentiationsregeln zur Ableitung von Polynomfunktionen, Kennen weiterer Differentiationsregeln (sofern sie für Funktionsuntersuchungen verwendet werden)
- Untersuchen einfacher und im Hinblick auf Anwendungen sinnvoller Funktionen bezüglich Monotonie und Krümmungsverhalten, Ermitteln von Extrem- und Wendestellen
- Lösen von Extremwertaufgaben
- Präzisieren einiger Grundbegriffe und Methoden der Differentialrechnung (insbesondere des Begriffes Grenzwert) unter Einbeziehung des Begriffes Stetigkeit
- Kennenlernen weiterer Anwendungen der Differentialrechnung

Nichtlineare analytische Geometrie

- Beschreiben von Kreisen, Kugeln und Kegelschnittslinien durch Gleichungen
- Schneiden von Kreisen bzw. Kegelschnittslinien mit Geraden, Ermitteln von Tangenten
- Beschreiben von ebenen Kurven durch Parameterdarstellungen
- Beschreiben von Raumkurven und Flächen durch Parameterdarstellungen

Stochastik

- Kennen der Begriffe diskrete Zufallsvariable und diskrete Verteilung
- Kennen der Zusammenhänge von relativen Häufigkeitsverteilungen und Wahrscheinlichkeitsverteilungen; von Mittelwert und Erwartungswert sowie von empirischer Varianz und Varianz
- Arbeiten mit diskreten Verteilungen (insbesondere mit der Binomialverteilung) in anwendungsorientierten Bereichen

© VERITAS-Verlag, Linz. DURCHSTARTEN ZUR AHS-MATURA MATHEMATIK. Alle Rechte vorbehalten