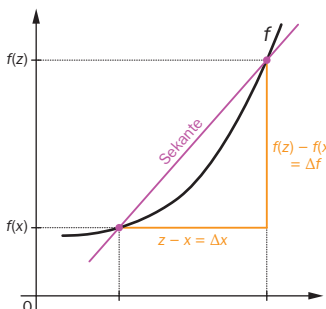
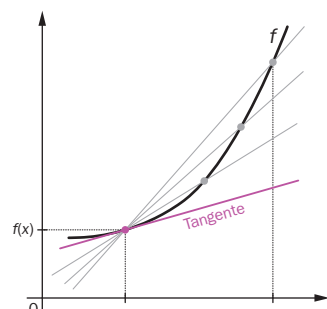


Formelsammlung

Differentialrechnung

Differenzenquotient und Differentialquotient

Differenzenquotient = mittlere Änderungsrate	Differentialquotient = momentane Änderungsrate = lokale Änderungsrate = 1. Ableitung
Differenzenquotient von f im Intervall $[x; z]$: $\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(z) - f(x)}{z - x}$	Differentialquotient von f an der Stelle x : $f'(x) = \frac{df}{dx} = \lim_{z \rightarrow x} \frac{f(z) - f(x)}{z - x}$
= Steigung der Sekante durch die Punkte $(x f(x))$ und $(z f(z))$: 	= Steigung der Tangente an den Graphen von f im Punkt $(x f(x))$: 

Ableitungen spezieller Funktionen

$c, n \in \mathbb{R}$

Funktion	1. Ableitung
$f(x) = c$ (konstant)	$f'(x) = 0$
$f(x) = x^n$	$f'(x) = n \cdot x^{n-1}$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$
$f(x) = \sqrt{x}$	$f'(x) = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x}}$
$f(x) = e^x$	$f'(x) = e^x$
$f(x) = \ln(x)$	$f'(x) = \frac{1}{x}$

Ableitungsregeln

$c \in \mathbb{R}$; u, v differenzierbare Funktionen

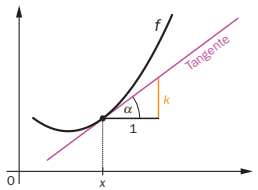
Faktorregel	$(c \cdot u)' = c \cdot u'$
Summenregel	$(u \pm v)' = u' \pm v'$
Produktregel	$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$
Quotientenregel $v(x) \neq 0$	$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$
Reziprokenregel $v(x) \neq 0$	$\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}$
Kettenregel	$f(x) = u(v(x)) \Rightarrow f'(x) = u'(v(x)) \cdot v'(x)$

Bewegungsvorgänge

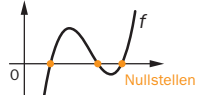
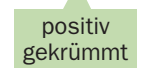
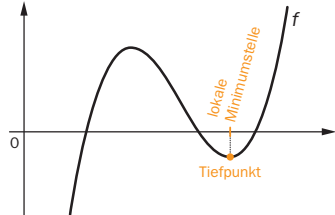
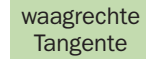
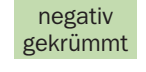
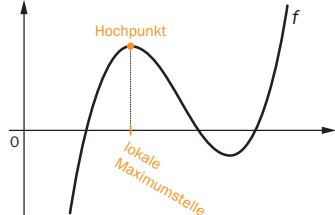
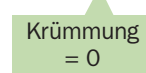
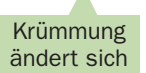
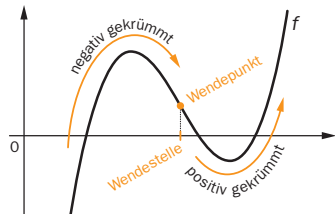
Ist $s(t)$ der zurückgelegte Weg zum Zeitpunkt t , dann gilt:

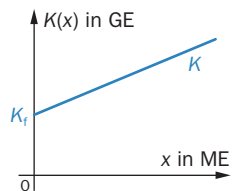
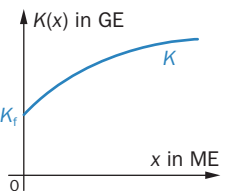
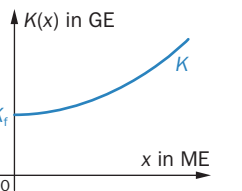
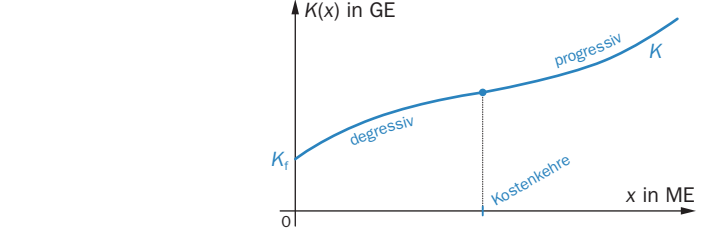
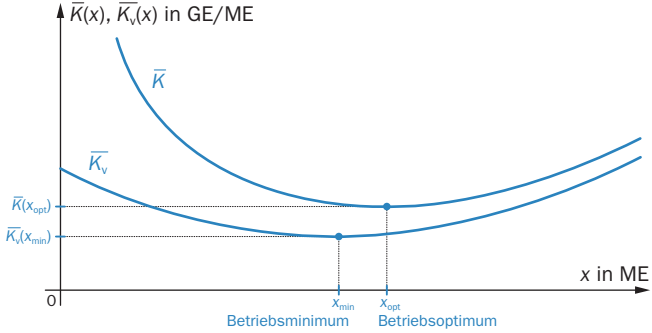
Geschwindigkeit	$v(t) = s'(t)$ [Geschwindigkeit = Änderung des Weges]
Beschleunigung	$a(t) = v'(t) = s''(t)$ [Beschleunigung = Änderung der Geschwindigkeit]

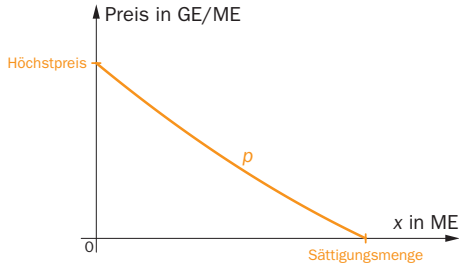
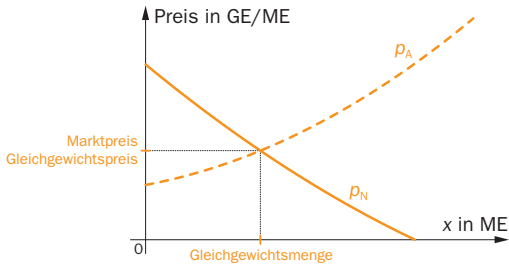
Funktionsuntersuchungen

Steigung, Monotonie	$f'(x)$ gibt die Steigung der Funktion f an der Stelle x an: ■ $f'(x) > 0$ für alle x aus einem Intervall $I \Rightarrow f$ ist in I streng monoton steigend. ■ $f'(x) < 0$ für alle x aus einem Intervall $I \Rightarrow f$ ist in I streng monoton fallend. ■ $f'(x) = 0 \Rightarrow$ Die Steigung von f an der Stelle x ist 0. Zusammenhang 1. Ableitung – Steigung – Steigungswinkel: $f'(x) = k = \tan(\alpha)$ 
Krümmung	$f''(x)$ gibt die Krümmung der Funktion f an der Stelle x an: ■ $f''(x) > 0$ für alle x aus einem Intervall $I \Rightarrow f$ ist in I positiv gekrümmt. ■ $f''(x) < 0$ für alle x aus einem Intervall $I \Rightarrow f$ ist in I negativ gekrümmt. ■ $f''(x) = 0 \Rightarrow$ Die Krümmung von f an der Stelle x ist 0. Bezeichnungen für die Krümmung: ■ positiv gekrümmt = linksgekrümmt = progressiv   ■ negativ gekrümmt = rechtsgekrümmt = degressiv  

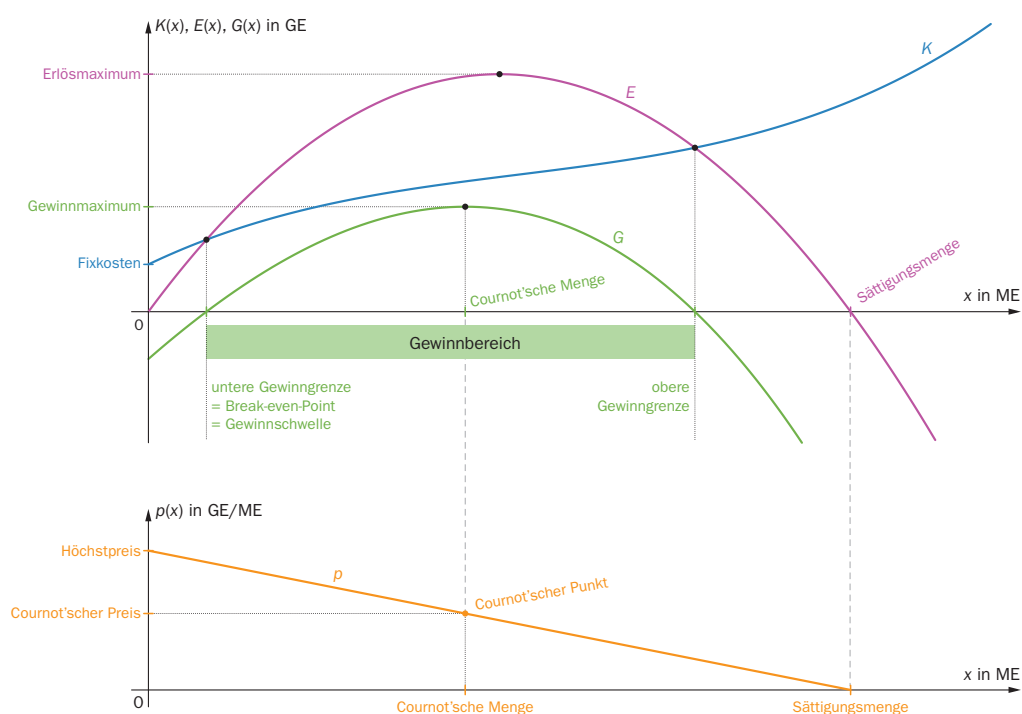
Bedingungen für Nullstellen, Extremstellen und Wendestellen

Nullstelle	x ist Nullstelle, wenn gilt: $f(x) = 0$	
lokale Minimumstelle	x ist lokale Minimumstelle, wenn gilt: $f'(x) = 0 \quad \text{und} \quad f''(x) > 0$  	
lokale Maximumstelle	x ist lokale Maximumstelle, wenn gilt: $f'(x) = 0 \quad \text{und} \quad f''(x) < 0$  	
Wendestelle	x ist Wendestelle, wenn gilt: $f''(x) = 0 \quad \text{und} \quad f'''(x) \neq 0$  	

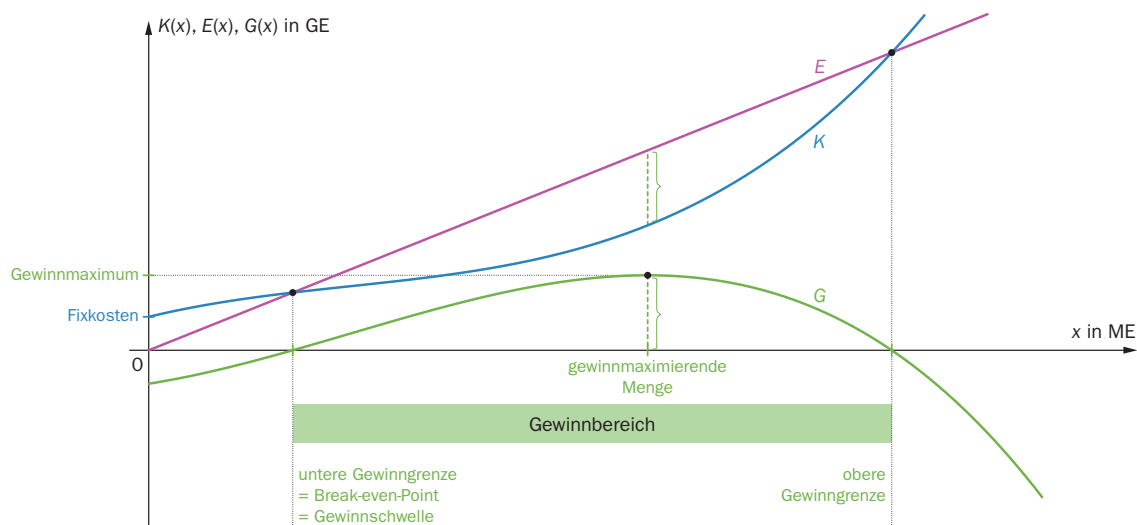
Kosten (Gesamtkosten)	$K(x) = K_v(x) + K_f$ (variable Kosten + Fixkosten) linear  degressiv  progressiv  ertragsgesetzlich 
Stückkosten	Stückkosten = Durchschnittskosten $\bar{K}(x) = \frac{K(x)}{x}$ variable Stückkosten = variable Durchschnittskosten $\bar{K}_v(x) = \frac{K_v(x)}{x}$  Die variablen Durchschnittskosten im Betriebsminimum $\bar{K}_v(x_{\min})$ legen die kurzfristige Preisuntergrenze fest. Die Durchschnittskosten im Betriebsoptimum $\bar{K}(x_{\text{opt}})$ legen die langfristige Preisuntergrenze (= kostendeckender Preis) fest.
Eigenschaften von Betriebsoptimum und Betriebsminimum	- Falls das Betriebsoptimum x_{opt} nicht am Rand des Definitionsbereichs von K liegt, dann gilt: $\bar{K}(x_{\text{opt}}) = K'(x_{\text{opt}})$ - Falls das Betriebsminimum $x_{\min}$ nicht am Rand des Definitionsbereichs von K liegt, dann gilt: $\bar{K}_v(x_{\min}) = K'(x_{\min})$

Preis	- im Monopol: $x \mapsto p(x)$... Preisfunktion der Nachfrage, Preis-Absatz-Funktion Umkehrung $p \mapsto x(p)$... Nachfragefunktion  - bei vollständiger Konkurrenz: $x \mapsto p_N(x)$... Preisfunktion der Nachfrage, Preis-Absatz-Funktion Umkehrung $p \mapsto x_N(p)$... Nachfragefunktion $x \mapsto p_A(x)$... Preisfunktion des Angebots Umkehrung $p \mapsto x_A(p)$... Angebotsfunktion Es bildet sich ein Gleichgewichtspreis p: 
Erlös (Umsatz) Gewinn Deckungsbeitrag	$E(x) = p(x) \cdot x$ bzw. $E(x) = p \cdot x$ $G(x) = E(x) - K(x)$ $D(x) = E(x) - K_V(x)$

Zusammenhänge im Monopol



Zusammenhänge bei vollständiger Konkurrenz



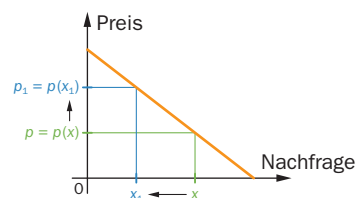
Grenzfunktionen

Grenzkosten	$K'(x) \approx K(x+1) - K(x)$ $K'(x)$ gibt näherungsweise die Änderung der Kosten an, wenn die Produktionsmenge von x auf $x+1$ erhöht wird.
Grenzerlös	$E'(x) \approx E(x+1) - E(x)$ $E'(x)$ gibt näherungsweise die Änderung des Erlöses an, wenn die Absatzmenge von x auf $x+1$ erhöht wird.
Grenzgewinn	$G'(x) \approx G(x+1) - G(x)$ $G'(x)$ gibt näherungsweise die Änderung des Gewinns an, wenn die Produktions- und Absatzmenge von x auf $x+1$ erhöht wird.

Elastizität der Nachfrage

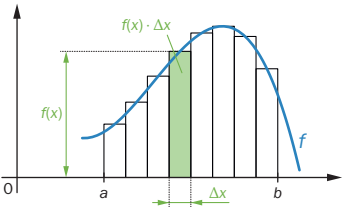
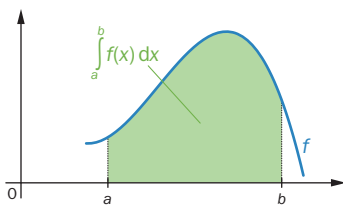
Preis-Absatz-Funktion $x \mapsto p(x)$

Bogenelastizität (mittlere Elastizität)	Bogenelastizität der Nachfrage bei Änderung des Preises von p auf p_1: $\varepsilon = \frac{\text{relative Änderung der Nachfrage}}{\text{relative Änderung des Preises}}$ $= \frac{\frac{x_1 - x}{x}}{\frac{p(x_1) - p(x)}{p(x)}} = \frac{\frac{\Delta x}{x}}{\frac{\Delta p}{p}}$						
(Punkt-)elastizität	(Punkt-)elastizität der Nachfrage an der Stelle x: $\varepsilon(x) = \frac{p(x)}{x \cdot p'(x)}$ <table border="1"> <tr> <td>$\varepsilon(x) < -1$</td><td>Die Nachfrage ist an der Stelle x elastisch. Preissenkung $\Rightarrow$ der Erlös steigt</td></tr> <tr> <td>$\varepsilon(x) = -1$</td><td>Die Nachfrage ist an der Stelle x fließend. Der Erlös ist an der Stelle x maximal.</td></tr> <tr> <td>$\varepsilon(x) > -1$</td><td>Die Nachfrage ist an der Stelle x unelastisch. Preissenkung $\Rightarrow$ der Erlös sinkt</td></tr> </table>	$\varepsilon(x) < -1$	Die Nachfrage ist an der Stelle x elastisch . Preissenkung $\Rightarrow$ der Erlös steigt	$\varepsilon(x) = -1$	Die Nachfrage ist an der Stelle x fließend . Der Erlös ist an der Stelle x maximal.	$\varepsilon(x) > -1$	Die Nachfrage ist an der Stelle x unelastisch . Preissenkung $\Rightarrow$ der Erlös sinkt
$\varepsilon(x) < -1$	Die Nachfrage ist an der Stelle x elastisch . Preissenkung $\Rightarrow$ der Erlös steigt						
$\varepsilon(x) = -1$	Die Nachfrage ist an der Stelle x fließend . Der Erlös ist an der Stelle x maximal.						
$\varepsilon(x) > -1$	Die Nachfrage ist an der Stelle x unelastisch . Preissenkung $\Rightarrow$ der Erlös sinkt						



Integralrechnung

f stetig im Intervall $[a; b]$

Grundvorstellung	$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum f(x) \cdot \Delta x = \int_a^b f(x) dx$  
Stammfunktion	Eine Funktion F heißt Stammfunktion der Funktion f, wenn gilt: $F'(x) = f(x) \quad (\text{für alle } x \text{ aus dem gemeinsamen Definitionsbereich von } f \text{ und } F)$ Ist F eine Stammfunktion von f, dann ist auch jede Funktion der Form $F(x) + c$ (mit $c \in \mathbb{R}$) eine Stammfunktion von f. Die Gesamtheit aller Stammfunktionen einer Funktion f nennt man unbestimmtes Integral von f. Schreibweisen: $\int f = \int f(x) dx = F(x) + c \quad (\text{mit } c \in \mathbb{R})$
Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung	Ist F eine Stammfunktion von f, dann gilt: $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$ Die Zahl $\int_a^b f(x) dx$ heißt bestimmtes Integral von f zwischen den Grenzen a und b.

Stammfunktionen spezieller Funktionen

$a, c, n \in \mathbb{R}; a > 0$

Funktion	eine Stammfunktion
$f(x) = c$ (konstant)	$F(x) = c \cdot x$
$f(x) = x^n \quad (n \neq -1)$	$F(x) = \frac{1}{n+1} \cdot x^{n+1}$
$f(x) = \frac{1}{x} \quad (x > 0)$	$F(x) = \ln(x)$
$f(x) = e^x$	$F(x) = e^x$

Integrationsregeln

$c \in \mathbb{R}; f, g$ Funktionen

Faktorregel	$\int (c \cdot f) = c \cdot \int f$
Summenregel	$\int (f \pm g) = \int f \pm \int g$

Beschreibende Statistik

Merkmal: untersuchte Eigenschaft

Merkmalsausprägungen: Werte, die ein Merkmal annehmen kann

Grundgesamtheit: Menge aller Merkmalsträger

Stichprobe: Teilmenge der Grundgesamtheit

Grundgesamtheit

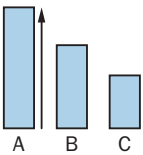
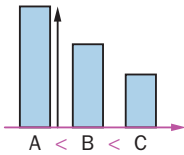
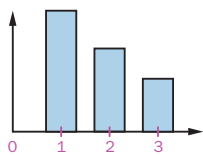


Stichprobe

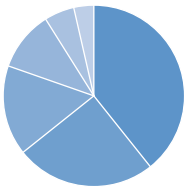
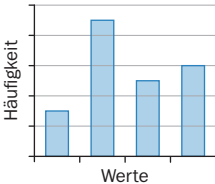
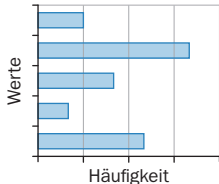
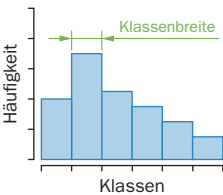
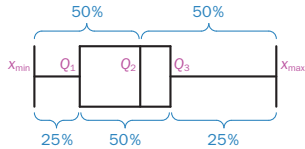
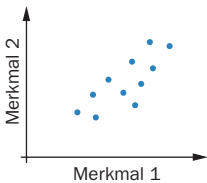
ziehen



Datentypen

nominalskaliert	ordinalskaliert	metrisch
Merkmalsausprägungen besitzen keine natürliche Ordnung	Merkmalsausprägungen besitzen eine qualitative Ordnung	Merkmalsausprägungen besitzen eine quantitative Ordnung (werden als Zahlen dargestellt)
		
geeignete Zentralmaße		
Modus	Modus Median	Modus Median arithmetisches Mittel

Grafische Darstellungen

Kreisdiagramm 	Säulendiagramm (Stabdiagramm) 	Balkendiagramm 
Histogramm 	Boxplot (Kastenschaubild) 	Streudiagramm (Punktwolke, -diagramm) 

Häufigkeiten

absolute Häufigkeit	Die absolute Häufigkeit H_i gibt an, wie oft der Wert x_i in einer Liste vorkommt.
relative Häufigkeit	$h_i = \frac{\text{absolute Häufigkeit}}{\text{Anzahl aller Daten}} = \frac{H_i}{n}$

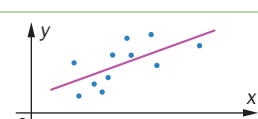
Zentralmaße und Quartile

Modus (Modalwert)	häufigster Wert einer Liste											
Median einer <u>geordneten</u> Liste mit n Werten	n ungerade: Wert an mittlerer Stelle der Liste n gerade: arithmetisches Mittel der beiden Werte in der Mitte											
Quartile einer <u>geordneten</u> Liste	Q_1 = Median aller Zahlen, die links vom Median stehen Q_2 = Median Q_3 = Median aller Zahlen, die rechts vom Median stehen											
arithmetisches Mittel	Werteliste: $x_1, x_2, \dots, x_n$ $\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n x_i$											
	Werte mit absoluten Häufigkeiten:	<table><tr><td>Wert</td><td>x_1</td><td>x_2</td><td>...</td><td>x_k</td></tr><tr><td>absolute H.</td><td>H_1</td><td>H_2</td><td>...</td><td>H_k</td></tr></table> mit $H_1 + H_2 + \dots + H_k = n$ $\bar{x} = \frac{x_1 \cdot H_1 + x_2 \cdot H_2 + \dots + x_k \cdot H_k}{n} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^k x_i \cdot H_i$	Wert	x_1	x_2	...	x_k	absolute H.	H_1	H_2	...	H_k
	Wert	x_1	x_2	...	x_k							
absolute H.	H_1	H_2	...	H_k								
Werte mit relativen Häufigkeiten:	<table><tr><td>Wert</td><td>x_1</td><td>x_2</td><td>...</td><td>x_k</td></tr><tr><td>relative H.</td><td>h_1</td><td>h_2</td><td>...</td><td>h_k</td></tr></table> $\bar{x} = x_1 \cdot h_1 + x_2 \cdot h_2 + \dots + x_k \cdot h_k = \sum_{i=1}^k x_i \cdot h_i$	Wert	x_1	x_2	...	x_k	relative H.	h_1	h_2	...	h_k	
Wert	x_1	x_2	...	x_k								
relative H.	h_1	h_2	...	h_k								
geometrisches Mittel	Werteliste: $x_1, x_2, \dots, x_n$ ($x_i > 0$) $\bar{x}_{\text{geom}} = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n}$	sinnvoll als Mittelwert von Änderungsfaktoren										

Streuungsmaße

Spannweite (Range)	größter Wert – kleinster Wert = $x_{\max} - x_{\min}$											
(Inter-)Quartilsabstand	$Q_3 - Q_1$											
empirische Varianz von n Werten	Werteliste: $x_1, x_2, \dots, x_n$ $s^2 = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$											
	Werte mit absoluten Häufigkeiten:	<table><tr><td>Wert</td><td>x_1</td><td>x_2</td><td>...</td><td>x_k</td></tr><tr><td>absolute H.</td><td>H_1</td><td>H_2</td><td>...</td><td>H_k</td></tr></table> $s^2 = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 \cdot H_1 + (x_2 - \bar{x})^2 \cdot H_2 + \dots + (x_k - \bar{x})^2 \cdot H_k}{n} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^k (x_i - \bar{x})^2 \cdot H_i$ mit $H_1 + H_2 + \dots + H_k = n$	Wert	x_1	x_2	...	x_k	absolute H.	H_1	H_2	...	H_k
	Wert	x_1	x_2	...	x_k							
absolute H.	H_1	H_2	...	H_k								
Werte mit relativen Häufigkeiten:	<table><tr><td>Wert</td><td>x_1</td><td>x_2</td><td>...</td><td>x_k</td></tr><tr><td>relative H.</td><td>h_1</td><td>h_2</td><td>...</td><td>h_k</td></tr></table> $s^2 = (x_1 - \bar{x})^2 \cdot h_1 + (x_2 - \bar{x})^2 \cdot h_2 + \dots + (x_k - \bar{x})^2 \cdot h_k = \sum_{i=1}^k (x_i - \bar{x})^2 \cdot h_i$	Wert	x_1	x_2	...	x_k	relative H.	h_1	h_2	...	h_k	
Wert	x_1	x_2	...	x_k								
relative H.	h_1	h_2	...	h_k								
empirische Standardabweichung	$s = \sqrt{s^2}$											

Lineare Regression und Korrelation

Merkmal 1	x_1	x_2	...	x_n	$\bar{x}, \bar{y} \dots$ arithmetische Mittel der x_i bzw. y_i
Merkmal 2	y_1	y_2	...	y_n	$s_x, s_y \dots$ Standardabweichungen der x_i bzw. y_i
empirische Kovarianz	$s_{xy} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) \cdot (y_i - \bar{y})$				
Korrelationskoeffizient nach Pearson	$r = \frac{s_{xy}}{s_x \cdot s_y}, \quad -1 \leq r \leq 1$ r ist ein Maß für den Grad des linearen Zusammenhangs zwischen den beiden Merkmalen.				
Regressionsgerade (Trendlinie)	Gleichung der Regressionsgeraden: $y = k \cdot x + d$ mit $k = \frac{s_{xy}}{s_x^2}$ und $d = \bar{y} - k \cdot \bar{x}$ 				

Bewegungsvorgänge

Weglänge	Sei $[t_1; t_2]$ ein Zeitintervall, $v(t)$ die Geschwindigkeit zum Zeitpunkt t und $v(t) \geq 0$ für alle $t \in [t_1; t_2]$. Länge des zurückgelegten Weges im Zeitintervall $[t_1; t_2]$: $\int_{t_1}^{t_2} v(t) dt$	
Beschleunigung, Geschwindigkeit, Weg	Für einen Bewegungsvorgang mit der Beschleunigung-Zeit-Funktion a, der Geschwindigkeit-Zeit-Funktion v und der Weg-Zeit-Funktion s gilt: ■ v ist eine Stammfunktion von a ■ s ist eine Stammfunktion von v	

Flächeninhalte

A ... Inhalt der grün schattierten Fläche

Fläche zwischen Graph und x-Achse	Nicht über Nullstellen hinweg integrieren!	
	$A = \int_a^b f(x) dx$	
	$A = -\int_a^b f(x) dx$ $= \left \int_a^b f(x) dx \right $	
Fläche zwischen zwei Graphen	Nicht über Schnittstellen hinweg integrieren!	
	$A = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx$	
	$A = \left \int_a^b [f(x) - g(x)] dx \right + \left \int_b^c [f(x) - g(x)] dx \right $	