DURCH STARTEN

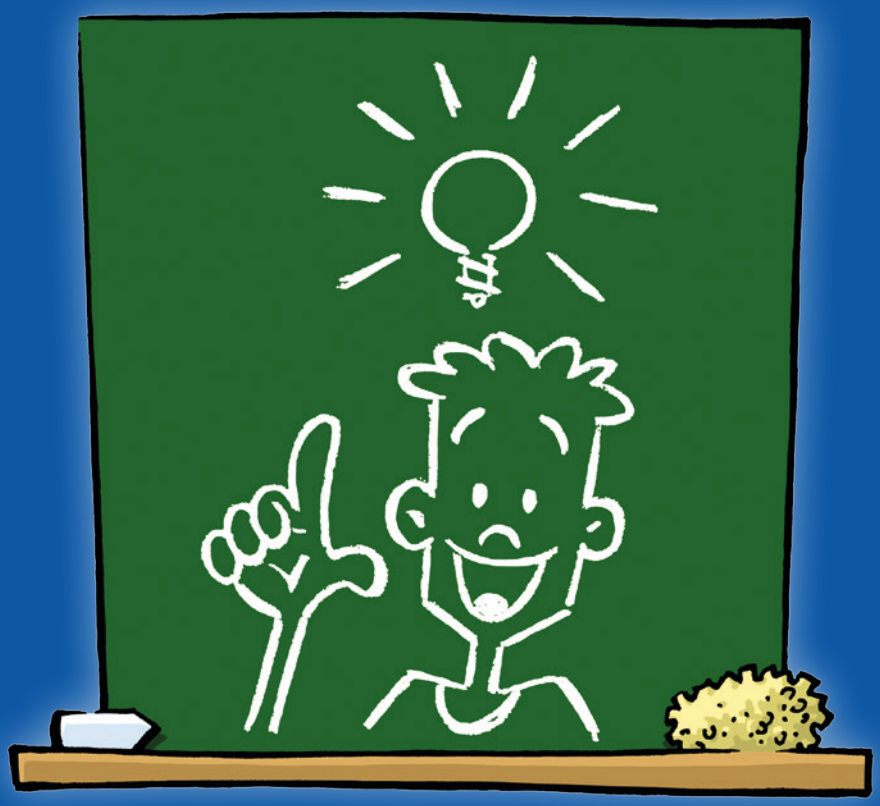
MATHEMATIK

MIT VOLLSTÄNDIG DURCHGERECHNETEN LÖSUNGEN

10

6. Klasse AHS

PROBESCHULARBEITEN



FIT FÜR DIE ZENTRALMATURA

VERITAS
Gemeinsam besser lernen

1. PROBESCHULARBEIT

Datum: Wintersemester (3. Semester NOST)
Stoffgebiet: Potenzen, Wurzeln und Logarithmen; Reelle Funktionen
Zeit: 50 min Teil 1, 50 min Teil 2
Grundkompetenzen:

AG-R 2.1	Einfache **Terme** und Formeln aufstellen, umformen und im Kontext deuten können
AG-R 2.4	Lineare **Ungleichungen** aufstellen, interpretieren, umformen/lösen, Lösungen (auch geometrisch) deuten können
FA-R 1.5	Eigenschaften von **Funktionen** erkennen, benennen, im Kontext deuten und zum Erstellen von Funktionsgraphen einsetzen können: Monotonie, Monotoniewechsel (lokale Extrema), Wendepunkte, Periodizität, Achsensymmetrie, asymptotisches Verhalten, Schnittpunkte mit den Achsen
FA-R 1.8	Durch Gleichungen (Formeln) gegebene Funktionen mit mehreren Veränderlichen im Kontext deuten können, Funktionswerte ermitteln können
FA-R 1.9	Einen Überblick über die wichtigsten (unten angeführten) Typen mathematischer Funktionen geben und ihre Eigenschaften vergleichen können
FA-R 2.3	Die Wirkung der Parameter k und d kennen und die Parameter in unterschiedlichen Kontexten deuten können
FA-R 3.1	Verbal, tabellarisch, graphisch oder durch eine Gleichung (Formel) gegebene Zusammenhänge dieser Art als entsprechende **Potenzfunktionen** erkennen bzw. betrachten können; zwischen diesen Darstellungsformen wechseln können
FA-R 3.2	Aus Tabellen, Graphen und Gleichungen von Potenzfunktionen Werte(paare) sowie die Parameter a und b ermitteln und im Kontext deuten können
FA-R 3.3	Die Wirkung der Parameter a und b kennen und die Parameter im Kontext deuten können
AN-R 1.1	Absolute und relative (prozentuelle) **Änderungsmaße** unterscheiden und angemessen verwenden können

1.1. Typ-1-artige-Aufgaben

1. AG-R 2.1 ___/2P.

Gegeben sind fünf Potenzumformungen.
Welche der folgenden Aussagen sind für alle $a, b \in \mathbb{R}^+$ korrekt?
Kreuze die richtige(n) Aussage(n) an!

$(a^3b)^{-5} = a^{-2}b^{-5}$	☐
$\left(\frac{a^{-2}}{b^3}\right)^3 = \frac{1}{a^6b^9}$	☐
$(a^{-3})^2 = a^{-6}$	☐
$a^{-3} : a^{-4} = a$	☐
$\frac{(a \cdot b^2)^{-1}}{a \cdot b} = b^{-1}$	☐

2. AG-R 2.1 ___/2P.

Ordne die Ausdrücke der rechten Seite den entsprechenden Ausdrücken der linken Seite zu!

$x^{\frac{5}{3}}$	
$x^{\frac{3}{5}}$	
$\frac{3}{5}x$	
$x^{-\frac{3}{5}}$	

A	$x \cdot \sqrt[3]{x^2}$
B	$\sqrt[5]{x^3}$
C	$-\sqrt[5]{x^3}$
D	$\frac{1}{\sqrt[3]{x^5}}$
E	$\frac{3x}{5}$
F	$\frac{1}{\sqrt[5]{x^3}}$

3. AG-R 2.1 ___/2P.

Forme den Bruch so um, dass im Nenner keine Wurzel vorkommt, und vereinfache anschließend so weit wie möglich!

$$\frac{x-y}{\sqrt{x-y}} =$$

4. AG-R 2.1 ___/2P.

Kreuze die beiden zutreffenden Aussagen an!

Zwei Potenzen mit gleicher Basis werden multipliziert, indem man die Hochzahlen multipliziert.	☐
Das Quadrat einer Potenz mit der Basis a und der Hochzahl n erhält man, indem man n verdoppelt.	☐
Potenzen mit unterschiedlichen Basen und gleicher Hochzahl n werden multipliziert, indem man die Basen miteinander multipliziert und die Hochzahl unverändert lässt.	☐
Stehen in einem Bruch im Zähler und im Nenner Potenzen mit gleicher Basis, so darf man die Exponenten dividieren.	☐
Zwei Potenzen mit gleicher Basis werden addiert, indem man die Hochzahlen multipliziert.	☐

5. AG-R 2.1 ___/2P.

Welche der folgenden Aussagen sind für alle $a, b \in \mathbb{R}_0^+$ und alle $m, n \in \mathbb{N}^*$ richtig?
Kreuze die richtige(n) Aussage(n) an!

$\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$	☐
$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[m]{a^n}$	☐
$\sqrt[n]{a^{n+1}} = a\sqrt[n]{a}$	☐
$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[m]{b} = \sqrt[m \cdot n]{a^n \cdot b^m}$	☐
$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[m]{b} = \sqrt[n+m]{ab}$	☐

6. FA 1.5 ___/2P.

Was kann über das Monotonieverhalten der Funktion f im Intervall $[0; 5]$ ausgesagt werden, wenn die Funktionswerte $f(1) = 3$ und $f(4) = 2$ gegeben sind?
Kreuze die beiden richtigen Aussagen an!

Die Funktion ist in $[0; 5]$ streng monoton fallend.	☐
Die Funktion ist in $[0; 5]$ streng monoton steigend.	☐
Die Funktion ist in $[0; 5]$ monoton fallend.	☐
Die Funktion kann in $[0; 5]$ nicht monoton steigend sein.	☐
Die Funktion kann in $[0; 5]$ nicht monoton sein.	☐

7. FA-R 1.8 ___/2P.

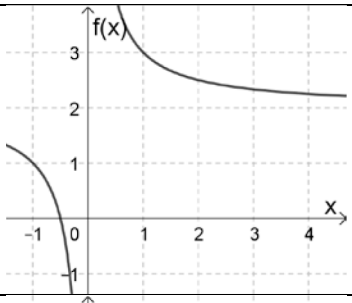
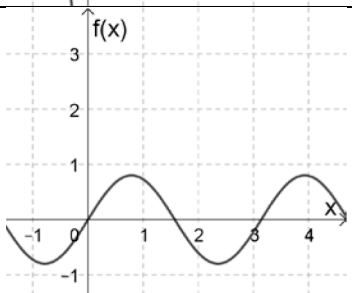
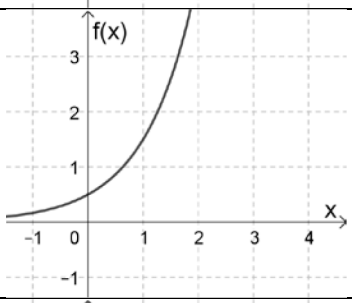
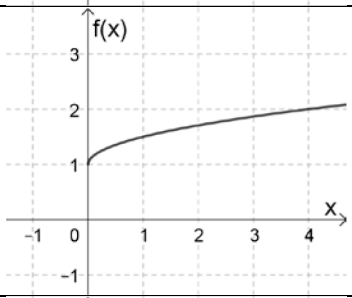
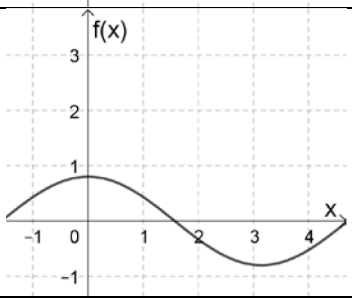
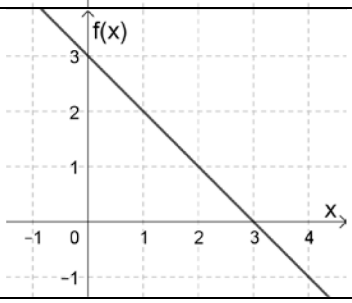
Eine Funktion f in zwei Variablen ist gegeben durch $f(x, y) = x^2 + 4xy - y^2$.
Kreuze die zutreffende(n) Aussage(n) an!

$f(1,2) > 0$	☐
$f(x, y) = (x\|y)$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$	☐
$f(1,2) = f(2,1)$	☐
$f(0,0) = 0$	☐
$f(-1,2) < 0$	☐

8. FA-R 1.9 ___/2P.

Im Folgenden sind vier Funktionsgleichungen (mit $a, b \in \mathbb{R}^+$) angeführt und die Graphen von sechs reellen Funktionen dargestellt.
Ordne den vier Funktionsgleichungen jeweils den passenden Graphen (aus A bis F) zu!

$f(x) = a \cdot x + b$	
$f(x) = a \cdot b^x$	
$f(x) = a \cdot \sqrt{x} + b$	
$f(x) = a \cdot \sin(b \cdot x)$	

A	
B	
C	
D	
E	
F	

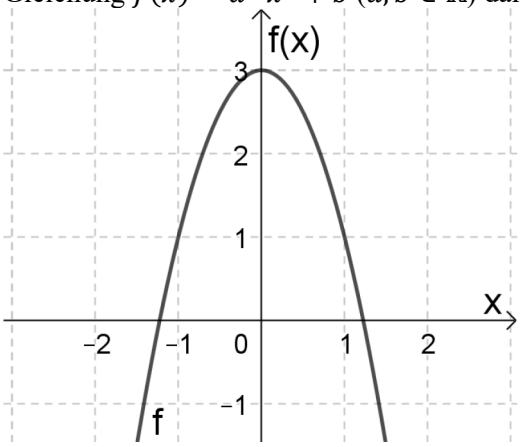
9. FA-R 2.3 ___/2P.

Die Kosten für das Ausleihen eines Motorrads bei einem Motorradverleih für x gefahrene Kilometer kann durch eine Funktion k mit der Gleichung $K(x) = a + b \cdot x$ mit $a, b \in \mathbb{R}^+$ beschrieben werden.

Erkläre, welche Bedeutung die Parameter a und b in diesem Zusammenhang haben!

10. FA-R 3.1 ___/2P.

Im nachstehenden Koordinatensystem ist der Graph einer quadratischen Funktion f mit der Gleichung $f(x) = a \cdot x^2 + b$ $(a, b \in \mathbb{R})$ dargestellt.



Ermittle die Werte der Parameter a und b! Die für die Berechnung relevanten Punkte mit ganzzahligen Koordinaten können dem Diagramm entnommen werden.

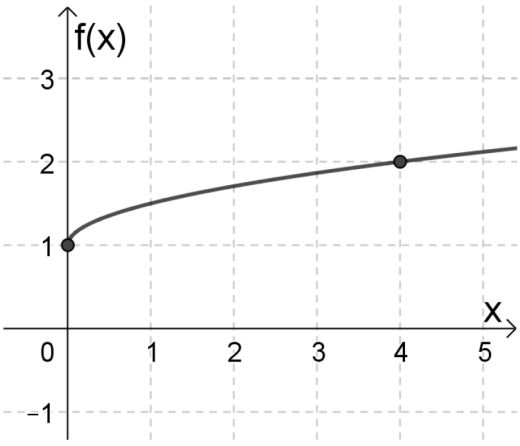
$a =$ _____

$b =$ _____

11. FA-R 3.2 ___/2P.

In der nachstehenden Abbildung ist der Graph einer Funktion f mit $f(x) = a \cdot x^{\frac{1}{2}} + b$ $(a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0)$ dargestellt.

Die Koordinaten der hervorgehobenen Punkte des Graphen der Funktion sind ganzzahlig.



Gib die Werte von a und b an!

$a =$ _____

$b =$ _____

12. FA-R 3.3 ___/2P.

Gegeben sei der Graph einer Funktion $f(x) = a \cdot (x + b)^2 + c \quad (a, b, c \in \mathbb{R}^+)$

Kreuze die richtige(n) Aussage(n) an!

a bewirkt eine Streckung bzw. Stauchung mit dem Faktor a normal zur 1. Achse.	☐
c bewirkt eine Verschiebung um c parallel zur 2. Achse nach oben.	☐
c bewirkt eine Verschiebung um c parallel zur 2. Achse nach unten.	☐
b bewirkt eine Verschiebung um b parallel zur 1. Achse nach links.	☐
b bewirkt eine Verschiebung um b parallel zur 1. Achse nach rechts.	☐

1.1. Typ-2-artige-Aufgaben

Ausgleichsaufgaben mit ☺ gekennzeichnet!
Rechne mit exakten Werten und runde gegebenenfalls auf 2 Dez.!

1. Ungleichungen

a) Stelle die Lösung der Ungleichung $x - 3 < y - 4$ grafisch dar! ___/2P. ☺

b) Ordne den Ungleichungssystemen die passende Lösungsmenge zu! ___/2P.

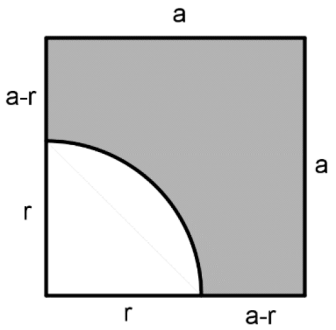
$x < -2 \wedge x > 3$	
$x > -2 \wedge x \leq 3$	
$x \geq -2 \wedge x < 3$	
$x \geq -2 \wedge x \leq 3$	

A	$L = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x \leq 3\}$
B	$L = (-2; 3)$
C	$L = \emptyset$
D	$L = (-\infty; -2) \cup (3; \infty)$
E	$L = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x < 3\}$
F	$L = (-2; 3]$

c) Ermittle die Lösungsmenge der linearen Ungleichung $2x - 4 < 3 - x$ für $x \in \mathbb{R}$! ___/2P.

d) Begründe, warum die Ungleichungen $x^2 \geq 25$ und $x \geq 5$ nicht äquivalent sind. ___/2P.

2. Gegeben ist ein Quadrat mit der Seitenlänge $a = 7$ cm.
In das Quadrat wird ein Viertelkreisbogen mit einem Eckpunkt als Mittelpunkt und r als Radius (mit $0 < r < 7$) eingezeichnet.



a) Gib eine möglichst vereinfachte Termdarstellung jener Funktion an, die jedem Radius r den Umfang u der grauen Fläche zuordnet, und zeichne den Graphen! ___/3P.

b) Gib eine möglichst vereinfachte Termdarstellung jener Funktion an, die jedem Radius r den Flächeninhalt A der grauen Fläche zuordnet, und zeichne den Graphen! ___/3P.

c) Es ist unmittelbar einzusehen, dass mit wachsendem r der Flächeninhalt der grauen Fläche kleiner wird. Gilt dies auch für den Umfang? Begründe deine Aussage! ___/2P.

3. Raumfahrt

a) Die Apollo-Raumfähren erreichten auf dem Weg zum Mond eine Geschwindigkeit von rund 39 000 Kilometer pro Stunde. Wie viele Stunden braucht eine solche Raumfähre ungefähr, um den ca. 384 400 km entfernten Mond zu erreichen? **___/2P.** ☺

b) Wie schnell ist eine Raumfähre unterwegs, wenn sie den Mars – mit einer mittleren Entfernung von $227{,}1 \cdot 10^6$ km von der Erde – in rund 300 Tagen erreicht? ___/2P.

4. Wird ein Körper mit der Anfangsgeschwindigkeit $v_0 = 15$ m/s senkrecht nach oben geworfen, so beträgt seine Höhe h in Meter nach t Sekunden ungefähr: $h(t) = v_0 t - 5t^2$.
Wann schlägt der Körper wieder auf den Boden auf, wann erreicht er seine größte Höhe und wie groß ist diese? ___/4P.

Punkte Teil 1: _____ / 24P.

Ausgleichspunkte aus Teil 2: _____ / 4P.

Summe: _____

Für eine positive Note müssen in Teil 1 mindestens 16 Punkte (mit Berücksichtigung der Ausgleichspunkte) erreicht werden.

Punkte Teil 2 (ohne Ausgleichspunkte): _____/ 20P.

Gesamtpunktezahl: _____/48P.

Note: _____

Notenschlüssel:

48 – 42	Punkte	Sehr gut
41 – 34	Punkte	Gut
33 – 24	Punkte	Befriedigend
23 – 16	Punkte	Genügend
15 – 0	Punkte	Nicht genügend

1.2. Typ-1-artige-Aufgaben

1. AG-R 2.1 ___/2P.

Gegeben sind fünf Potenzumformungen.
Welche der folgenden Aussagen sind für alle $a, b \in \mathbb{R}^+$ korrekt?
Kreuze die richtige(n) Aussage(n) an!

$(a^3b)^{-5} = a^{-2}b^{-5}$	☐
$\left(\frac{a^{-2}}{b^3}\right)^3 = \frac{1}{a^6b^9}$	☒
$(a^{-3})^2 = a^{-6}$	☒
$a^{-3} : a^{-4} = a$	☒
$\frac{(a \cdot b^2)^{-1}}{a \cdot b} = b^{-1}$	☐

2. AG-R 2.1 ___/2P.

Ordne die Ausdrücke der rechten Seite den entsprechenden Ausdrücken der linken Seite zu!

A, B, E, F

3. AG-R 2.1 ___/2P.

Forme den Bruch so um, dass im Nenner keine Wurzel vorkommt, und vereinfache anschließend so weit wie möglich!

$$\frac{x-y}{\sqrt{x-y}} =$$

$$\frac{x-y}{\sqrt{x-y}} = \frac{(x-y)\cdot\sqrt{x-y}}{\sqrt{x-y}\cdot\sqrt{x-y}} = \frac{(x-y)\cdot\sqrt{x-y}}{(x-y)} = \sqrt{x-y}$$

4. AG-R 2.1 ___/2P.

Kreuze die beiden zutreffenden Aussagen an!

Zwei Potenzen mit gleicher Basis werden multipliziert, indem man die Hochzahlen multipliziert.	☐
Das Quadrat einer Potenz mit der Basis a und der Hochzahl n erhält man, indem man n verdoppelt.	☒
Potenzen mit unterschiedlichen Basen und gleicher Hochzahl n werden multipliziert, indem man die Basen miteinander multipliziert und die Hochzahl unverändert lässt.	☒
Stehen in einem Bruch im Zähler und im Nenner Potenzen mit gleicher Basis, so darf man die Exponenten dividieren.	☐
Zwei Potenzen mit gleicher Basis werden addiert, indem man die Hochzahlen multipliziert.	☐

5. AG-R 2.1 ___/2P.

Welche der folgenden Aussagen sind für alle $a, b \in \mathbb{R}_0^+$ und alle $m, n \in \mathbb{N}^*$ richtig?
Kreuze die richtige(n) Aussage(n) an!

$\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$	☒
$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[m]{a^n}$	☐
$\sqrt[n]{a^{n+1}} = a\sqrt[n]{a}$	☒
$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[m]{b} = \sqrt[m \cdot n]{a^n \cdot b^m}$	☐
$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[m]{b} = \sqrt[n+m]{ab}$	☐

6. FA 1.5 ___/2P.

Was kann über das Monotonieverhalten der Funktion f im Intervall $[0; 5]$ ausgesagt werden, wenn die Funktionswerte $f(1) = 3$ und $f(4) = 2$ gegeben sind?
Kreuze die beiden richtigen Aussagen an!

Die Funktion ist in $[0; 5]$ streng monoton fallend.	☐
Die Funktion ist in $[0; 5]$ streng monoton steigend.	☐
Die Funktion ist in $[0; 5]$ monoton fallend.	☐
Die Funktion kann in $[0; 5]$ nicht monoton steigend sein.	☒
Die Funktion kann in $[0; 5]$ nicht monoton sein.	☒

7. FA-R 1.8 ___/2P.

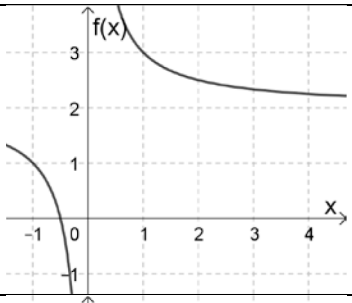
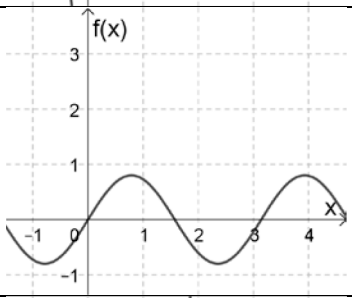
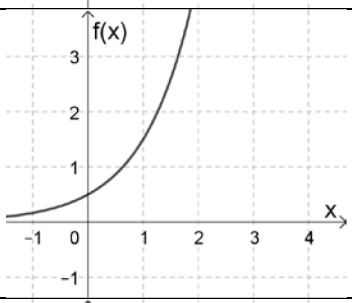
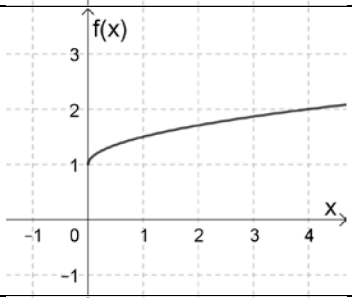
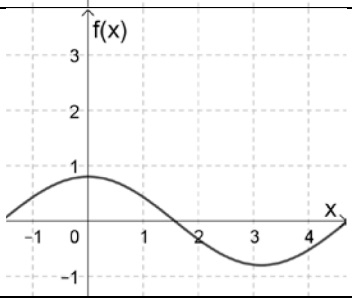
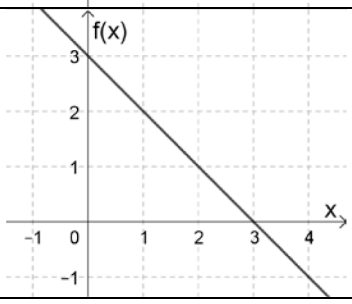
Eine Funktion f in zwei Variablen ist gegeben durch $f(x, y) = x^2 + 4xy - y^2$.
Kreuze die zutreffende(n) Aussage(n) an!

$f(1{,}2) > 0$	☐
$f(x, y) = (x\|y)$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$	☐
$f(1{,}2) = f(2{,}1)$	☒
$f(0{,}0) = 0$	☒
$f(-1{,}2) < 0$	☐

8. FA-R 1.9 ___/2P.

Im Folgenden sind vier Funktionsgleichungen (mit $a, b \in \mathbb{R}^+$) angeführt und die Graphen von sechs reellen Funktionen dargestellt.
Ordne den vier Funktionsgleichungen jeweils den passenden Graphen (aus A bis F) zu!

$f(x) = a \cdot x + b$	**F**
$f(x) = a \cdot b^x$	**C**
$f(x) = a \cdot \sqrt{x} + b$	**D**
$f(x) = a \cdot \sin(b \cdot x)$	**B**

A	
B	
C	
D	
E	
F	

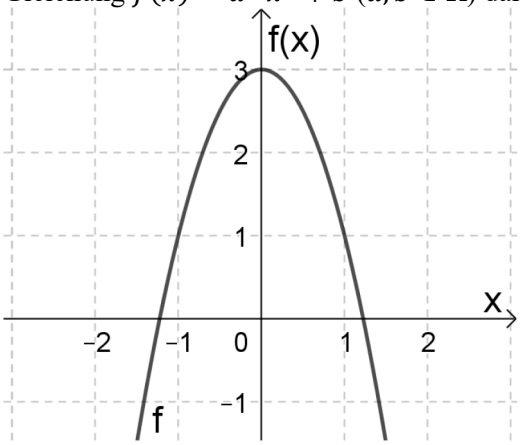
9. FA-R 2.3 ___/2P.

Die Kosten für das Ausleihen eines Motorrads bei einem Motorradverleih für x gefahrene Kilometer kann durch eine Funktion k mit der Gleichung $K(x) = a + b \cdot x$ mit $a, b \in \mathbb{R}^+$ beschrieben werden.
Erkläre, welche Bedeutung die Parameter a und b in diesem Zusammenhang haben!

a gibt die Fixkosten für das Ausleihen an.
b gibt die (variablen) Kosten pro gefahrenen Kilometer an.

10. FA-R 3.1 ___/2P.

Im nachstehenden Koordinatensystem ist der Graph einer quadratischen Funktion f mit der Gleichung $f(x) = a \cdot x^2 + b$ $(a, b \in \mathbb{R})$ dargestellt.

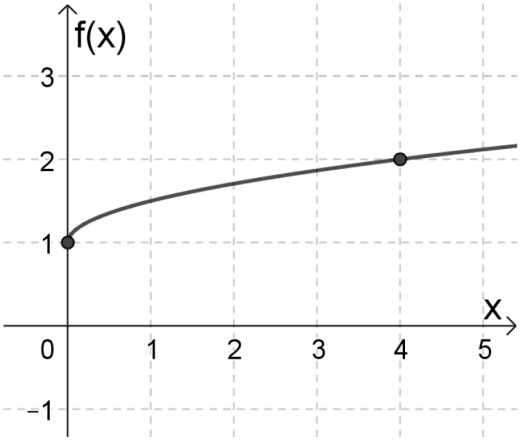


Ermittle die Werte der Parameter a und b! Die für die Berechnung relevanten Punkte mit ganzzahligen Koordinaten können dem Diagramm entnommen werden.

$a = -2, b = 3$

11. FA-R 3.2 ___/2P.

In der nachstehenden Abbildung ist der Graph einer Funktion f mit
$f(x) = a \cdot x^{\frac{1}{2}} + b$ $(a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0)$ dargestellt.
Die Koordinaten der hervorgehobenen Punkte des Graphen der Funktion sind ganzzahlig.



Gib die Werte von a und b an!

$a = \frac{1}{2}$
$b = 1$

12. FA-R 3.3 ___/2P.

Gegeben sei der Graph einer Funktion $f(x) = a \cdot (x + b)^2 + c \quad (a, b, c \in \mathbb{R}^+)$

Kreuze die richtige(n) Aussage(n) an!

a bewirkt eine Streckung bzw. Stauchung mit dem Faktor a normal zur 1. Achse.	☒
c bewirkt eine Verschiebung um c parallel zur 2. Achse nach oben.	☒
c bewirkt eine Verschiebung um c parallel zur 2. Achse nach unten.	☐
b bewirkt eine Verschiebung um b parallel zur 1. Achse nach links.	☒
b bewirkt eine Verschiebung um b parallel zur 1. Achse nach rechts.	☐

1.3. Typ-2-artige-Aufgaben

Ausgleichsaufgaben mit ☺ gekennzeichnet!
Rechne mit exakten Werten und runde gegebenenfalls auf 2 Dez.!

1. Ungleichungen

a) Stelle die Lösung der Ungleichung $x - 3 < y - 4$ grafisch dar! ___/**2P.** ☺

b) Ordne den Ungleichungssystemen die passende Lösungsmenge zu! ___/2P.

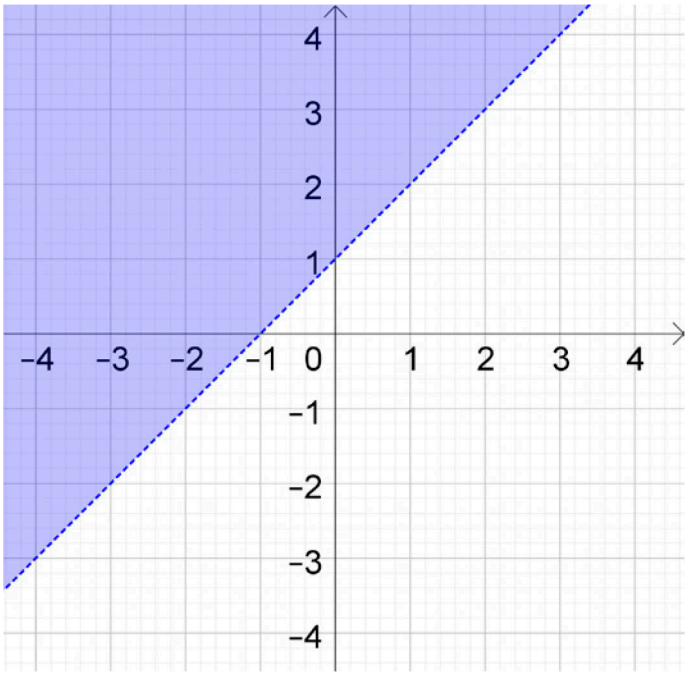
$x < -2 \wedge x > 3$	
$x > -2 \wedge x \leq 3$	
$x \geq -2 \wedge x < 3$	
$x \geq -2 \wedge x \leq 3$	

A	$L = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x \leq 3\}$
B	$L = (-2; 3)$
C	$L = \emptyset$
D	$L = (-\infty; -2) \cup (3; \infty)$
E	$L = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x < 3\}$
F	$L = (-2; 3]$

c) Ermittle die Lösungsmenge der linearen Ungleichung $2x - 4 < 3 - x$ für $x \in \mathbb{R}$! ___/2P.

d) Begründe, warum die Ungleichungen $x^2 \geq 25$ und $x \geq 5$ nicht äquivalent sind. ___/2P.

a) $x - 3 < y - 4$



b)

$x < -2 \wedge x > 3$	**D**
$x > -2 \wedge x \leq 3$	**F**
$x \geq -2 \wedge x < 3$	**E**
$x \geq -2 \wedge x \leq 3$	**A**

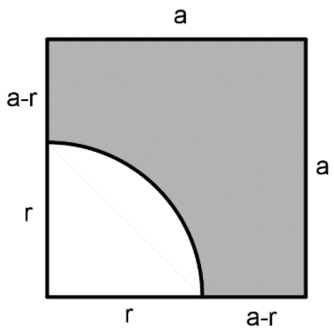
A	$L = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x \leq 3\}$
B	$L = (-2; 3)$
C	$L = \emptyset$
D	$L = (-\infty; -2) \cup (3; \infty)$
E	$L = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x < 3\}$
F	$L = (-2; 3]$

c)

$$2x - 4 < 3 - x$$
$$3x < 7$$
$$x < \frac{7}{3}$$
$$L = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x < \frac{7}{3}\right\}$$

d) Um die Ungleichung $x^2 \geq 25$ lösen zu können, muss eine Fallunterscheidung gemacht werden, da x sowohl positiv als auch negativ sein kann.
Die Zahl -7 ist z.B. Lösung der Ungleichung $x^2 \geq 25$, da $(-7)^2 = 49 \geq 25$, aber nicht Lösung der Ungleichung $x \geq 5$, da -7 kleiner als 5 ist.

2. Gegeben ist ein Quadrat mit der Seitenlänge $a = 7$ cm.
In das Quadrat wird ein Viertelkreisbogen mit einem Eckpunkt als Mittelpunkt und r als Radius (mit $0 < r < 7$) eingezeichnet.



a) Gib eine möglichst vereinfachte Termdarstellung jener Funktion an, die jedem Radius r den Umfang u der grauen Fläche zuordnet, und zeichne den Graphen! ___/3P.

b) Gib eine möglichst vereinfachte Termdarstellung jener Funktion an, die jedem Radius r den Flächeninhalt A der grauen Fläche zuordnet, und zeichne den Graphen! ___/3P.

c) Es ist unmittelbar einzusehen, dass mit wachsendem r der Flächeninhalt der grauen Fläche kleiner wird. Gilt dies auch für den Umfang? Begründe deine Aussage! ___/2P.

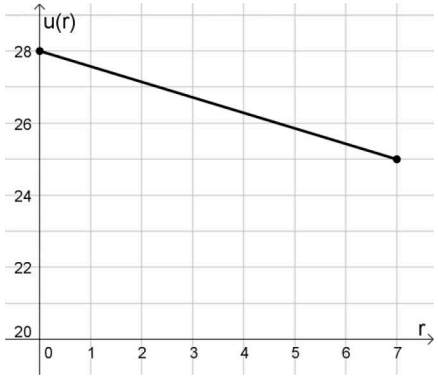
a) ges. $u(r)$

$$u(r) = (a - r) + a + a + (a - r) + \frac{1}{4} \cdot 2r\pi$$

$$u(r) = 4a - 2r + \frac{r\pi}{2}$$

$$u(r) = 28 - 2r + \frac{r\pi}{2}$$

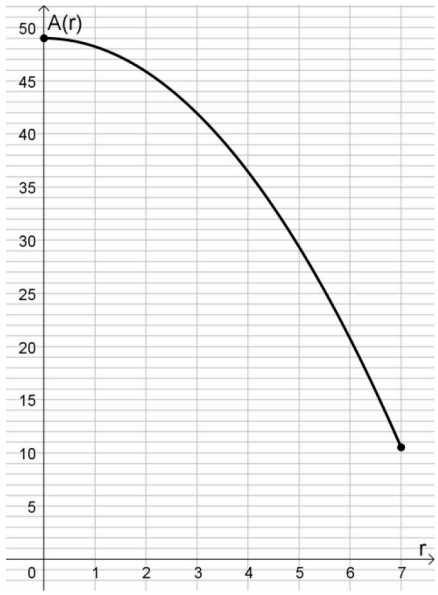
$$u(r) = 28 - r \cdot \left(2 - \frac{\pi}{2}\right)$$



b) ges. $A(r)$

$$A(r) = a^2 - \frac{1}{4} r^2 \pi$$

$$A(r) = 49 - \frac{r^2 \pi}{4}$$



c) Mit wachsendem Radius wird auch der Umfang kleiner. Dies ist z.B. am Graphen der linearen Funktion $u(r)$ zu erkennen, da die Steigung negativ ist.

3. Raumfahrt

a) Die Apollo-Raumfähren erreichten auf dem Weg zum Mond eine Geschwindigkeit von rund 39 000 Kilometer pro Stunde. Wie viele Stunden braucht eine solche Raumfähre ungefähr, um den ca. 384 400 km entfernten Mond zu erreichen? ___**/2P.** ☺

b) Wie schnell ist eine Raumfähre unterwegs, wenn sie den Mars – mit einer mittleren Entfernung von $227{,}1 \cdot 10^6$ km von der Erde – in rund 300 Tagen erreicht? ___/2P.

a)

$$s = v \cdot t$$
$$t = \frac{s}{v} = \frac{384\,400}{39\,000} \approx 9{,}86 \text{ h}$$

b)

$$s = v \cdot t$$
$$v = \frac{s}{t} = \frac{227{,}1 \cdot 10^6}{7\,200} = 31\,541{,}\overline{6} \text{ km/h}$$

4. Wird ein Körper mit der Anfangsgeschwindigkeit $v_0 = 15$ m/s senkrecht nach oben geworfen, so beträgt seine Höhe h in Meter nach t Sekunden ungefähr: $h(t) = v_0 t - 5t^2$.
Wann schlägt der Körper wieder auf den Boden auf, wann erreicht er seine größte Höhe und wie groß ist diese? ___/4P.

$$h(t) = 15t - 5t^2$$
$$15t - 5t^2 = 0$$
$$5t \cdot (3 - t) = 0$$
$$t_1 = 0 \qquad t_2 = 3$$

Der Körper schlägt nach 3 Sekunden wieder auf den Boden auf.

$$h(1{,}5) = 15 \cdot 1{,}5 - 5 \cdot 1{,}5^2 = 11{,}25 \text{ m}$$

Seine größte Höhe erreicht er nach 1,5 Sekunden in 11,25 Meter.

2. PROBESCHULARBEIT

Datum:	Wintersemester (3. Semester NOST)
Stoffgebiet:	Reelle Funktionen
Zeit:	50 min Teil 1, 50 min Teil 2
Grundkompetenzen:	
FA-R 4.1	Typische Verläufe von Graphen in Abhängigkeit vom Grad der **Polynomfunktion** (er)kennen
FA-R 4.3	Aus Tabellen, Graphen und Gleichungen von Polynomfunktionen Funktionswerte, aus Tabellen und Graphen sowie aus einer quadratischen Funktionsgleichung Argumentwerte ermitteln können
FA-R 5.1	Verbal, tabellarisch, graphisch oder durch eine Gleichung (Formel) gegebene exponentielle Zusammenhänge als **Exponentialfunktion** erkennen bzw. betrachten können; zwischen diesen Darstellungsformen wechseln können
FA-R 5.2	Aus Tabellen, Graphen und Gleichungen von Exponentialfunktionen Werte(paare) ermitteln und im Kontext deuten können
FA-R 5.3	Die Wirkung der Parameter a und b (bzw. e^{λ}) kennen und die Parameter in unterschiedlichen Kontexten deuten können
FA-R 5.4	Charakteristische Eigenschaften ($f(x+1) = b \cdot f(x); [e^x]' = e^x$) kennen und im Kontext deuten können
FA-R 5.5	Die Begriffe Halbwertszeit und Verdoppelungszeit kennen, die entsprechenden Werte berechnen und im Kontext deuten können
FA-R 5.6	Die Angemessenheit einer Beschreibung mittels Exponentialfunktion bewerten können

2.1. Typ-1-artige-Aufgaben

1. FA-R 4.3 ___/2P.

Gegeben ist die Gleichung einer reellen Funktion f mit $f(x) = x^2 + 2x - 8$.
Einen Funktionswert $f(x)$ nennt man negativ, wenn $f(x) < 0$ gilt.
Bestimme alle $x \in \mathbb{R}$, deren zugehöriger Funktionswert $f(x)$ negativ ist!

2. FA-R 5.1 ___/2P.

Von einem radioaktiven Element ist nach 90 Jahren noch ein Achtel der ursprünglichen Menge von 10 000 mg vorhanden.
Kreuze die beiden richtigen Aussagen an!

Nach 45 Jahren sind 75 % der ursprünglichen Menge zerfallen.	☐
Die Halbwertszeit beträgt 30 Jahre.	☐
Nach 180 Jahren sind noch 625 mg vorhanden.	☐
Nach 120 Jahren sind 93,75 % der ursprünglichen Menge zerfallen.	☐
Nach 15 Jahren sind noch genau 7500 mg vorhanden.	☐

3. FA-R 5.1 ___/2P.

Ein radioaktiver Zerfall verlaufe nach dem folgenden Zerfallsgesetz.
Gib das Zerfallsgesetz mit Hilfe der Zahl e an!
Wie groß ist die Zerfallskonstante λ?

$$N(t) = 15\,000 \cdot 0{,}96^t$$

4. FA-R 5.1 ___/2P.

Gegeben sind fünf Funktionsgleichungen. Welche davon beschreiben eine exponentielle Abnahme? Kreuze die zutreffende(n) Funktionsgleichung(en) an!

$f(x) = 0{,}9 \cdot 1{,}02^x$	☐
$g(x) = 1{,}02 \cdot 0{,}9^x$	☐
$h(t) = 0{,}8 \cdot e^{0{,}2 \cdot t}$	☐
$N(t) = 2 \cdot e^{-3 \cdot t}$	☐
$y(x) = 1 - e \cdot x$	☐

5. FA-R 5.1 ___/2P.

Gib jeweils die Funktionsgleichung einer Exponentialfunktion $N(t) = N_0 \cdot a^t$ an (t in Tagen), für die gilt:

Die Funktionswerte nehmen täglich um 4 % ab:

Der Graph von N verläuft durch den Punkt $\mathrm{P}(0|3)$ und die Funktionswerte nehmen pro Tag um 8 % zu:

6. FA-R 5.1 ___/2P.

Die Funktion f beschreibt eine exponentielle Änderung.

Ergänze die fehlenden Funktionswerte und bestimme die Funktionsgleichung von f.

t	0	2	4	6
$f(t)$		400	100	

$f(t) =$

7. FA-R 5.1 ___/2P.

Der Flächeninhalt eines Ölteppichs beträgt momentan 1,5 km² und wächst täglich um 5 %.

Nach wie vielen Tagen ist der Ölteppich erstmals größer als 2 km²?

8. FA-R 5.2 ___/2P.

Die folgende Formel gibt näherungsweise den Zusammenhang zwischen der Zeit t (in Tagen) und der Menge des radioaktiven Isotops Barium-140 $N(t)$ (in mg) wieder:

$$N(t) = N_0 \cdot e^{-0{,}053319 \cdot t}$$

Überprüfe rechnerisch die folgende Aussage: „Nach 13 Tagen beträgt die Menge des radioaktiven Isotops rund die Hälfte der Ausgangsmenge."

9. FA-R 5.3 ___/2P.

Ein Körper mit der Temperatur 80°C wird in einen Kühlraum gestellt.
Dabei nimmt seine Temperatur pro Stunde um 20 % ab.
Nach welcher Zeit ist die Temperatur unter 15° gesunken?

10. FA-R 5.4 ___/2P.

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = 40 \cdot 1{,}98^x$.
Welche der folgenden Aussagen trifft/treffen auf diese Funktion zu?
Kreuze die zutreffende(n) Aussage(n) an!

Der Graph der Funktion f verläuft durch den Punkt $P = (40\|0)$.	☐
Die Funktion f ist im Intervall $[0; 4]$ streng monoton steigend.	☐
Wenn man den Wert des Arguments x um 4 vergrößert, wird der Funktionswert 40-mal so groß.	☐
Der Funktionswert $f(x)$ ist positiv für alle $x \in \mathbb{R}$.	☐
Wenn man den Wert des Arguments x um 1 vergrößert, wird der zugehörige Funktionswert um 98 % größer.	☐

11. FA-R 5.5 ___/2P.

Francium ist ein radioaktives Element.
Die nach t Minuten noch vorhandene Menge wird durch die Funktion f mit der Gleichung $f(t) = a \cdot e^{-\lambda \cdot t}$ angegeben, wobei a die ursprünglich vorhandene Menge des Elements bezeichnet. Die Halbwertszeit von Francium beträgt 22 Minuten.
Ermittle den Parameter λ (auf Zenttausendstel genau)!

$\lambda \approx$ _____

12. FA-R 5.5 ___/2P.

Für eine medizinische Untersuchung wird das radioaktive Isotop ${}^{99m}_{43}\mathrm{Tc}$ (Technetium) künstlich hergestellt. Dieses Isotop hat eine Halbwertszeit von 6,01 Stunden.
Gib an, wie lange es dauert, bis von einer bestimmten Ausgangsmenge Technetiums weniger als ein Viertel vorhanden ist!

2.1. Typ-2-artige-Aufgaben

Ausgleichsaufgaben mit ☺ gekennzeichnet!
Rechne mit exakten Werten und runde gegebenenfalls auf 2 Dez.!

1. Die Bevölkerung mancher Städte wächst exponentiell.

a) Im Jahr 1990 hatte eine solche Stadt ca. 30 000 Einwohner, 2010 waren es bereits 41 000. Erstelle eine Formel, mit der du die Einwohnerzahl dieser Stadt für ein bestimmtes Jahr abschätzen kannst. **___/2P. ☺**

b) Die Bevölkerung einer anderen exponentiell wachsenden Stadt wächst jährlich um 1,4 %. Im Jahr 2000 hatte diese Stadt ca. 38 000 Einwohner.
Berechne die zu erwartende Einwohnerzahl für 2025 (auf Hunterter gerundet)! ___/2P.

c) Erkläre, wie du berechnen kannst, wann die Stadt aus b) die 40 000-Einwohner-Grenze überschritten hat!
___/2P.

d) Im Jahr 2012 lebten 45 000 Menschen in der Stadt aus b).
Hat das Bevölkerungswachstum im Zeitraum von 2000 bis 2012 im Vergleich zum expoentiellen Modell aus b) zu- oder abgenommen? Begründe deine Antwort! ___/2P.

2. Radioaktive Zerfallsvorgänge verlaufen nach den Gesetzmäßigkeiten von exponentiellen Änderungen. Radioaktiver Kohlenstoff (^{14}C) besitzt eine Halbwertszeit von ca. 5730 Jahren.

a) Berechne, welcher Prozentsatz der vorhandenen Menge ^{14}C pro Jahr zerfällt! **___/1P. ☺**

b) Berechne, welcher Prozentsatz der Ausgangsmenge nach 10 000 Jahren noch vorhanden ist! **___/1P. ☺**

c) In einem Skelettknochen, der bei Ausgrabungsarbeiten gefunden wurde, sind noch 67 % der ursprünglichen ^{14}C -Menge enthalten. Berechne das Alter des Knochens! ___/2P.

d) Um die ^{14}C -Methode zur Altersbestimmung anwenden zu können, muss noch mindestens $\frac{1}{1000}$ der Ausgangsmenge an ^{14}C in der Probe enthalten sein.
Berechne, wie viele Halbwertszeiten maximal vergangen sein dürfen, damit die ^{14}C –Methode noch anwendbar ist! ___/2P.

3. Das radioaktive Isotop Barium 140 hat eine Halbwertszeit von 13 Tagen.

a) Stelle das Zerfallsgesetz $N(t) = N_0 \cdot a^t$ auf! ___/2P.

b) Wie viel Prozent der ursprünglich vorhandenen Menge sind nach 2 Tagen noch vorhanden? ___/2P.

c) Wenn zu Beginn der Beobachtung 3,2 mg vorhanden sind, wie viel mg zerfallen am ersten Tag? Wie viel mg zerfallen am 14. Tag? ___/2P.

d) Berechne, wann nur mehr 0,1 mg übrig sind! ___/2P.

e) Berechne, nach wie vielen Stunden 5% zerfallen sind! ___/2P.

Punkte Teil 1: _____ / 24P.

Ausgleichspunkte aus Teil 2: _____ / 4P.

Summe: _____
Für eine positive Note müssen in Teil 1 mindestens 16 Punkte (mit Berücksichtigung der Ausgleichspunkte) erreicht werden.

Punkte Teil 2 (ohne Ausgleichspunkte): _____/ 20P.

Gesamtpunktezahl: _____/48P.

Note: _____

Notenschlüssel:

48 – 42	Punkte	Sehr gut
41 – 34	Punkte	Gut
33 – 24	Punkte	Befriedigend
23 – 16	Punkte	Genügend
15 – 0	Punkte	Nicht genügend

2.2. Typ-1-artige-Aufgaben

1. FA-R 4.3 ___/2P.

Gegeben ist die Gleichung einer reellen Funktion f mit $f(x) = x^2 + 2x - 8$.
Einen Funktionswert $f(x)$ nennt man negativ, wenn $f(x) < 0$ gilt.
Bestimme alle $x \in \mathbb{R}$, deren zugehöriger Funktionswert $f(x)$ negativ ist!

Für alle $x \in (-4; 2)$ gilt: $f(x) < 0$

2. FA-R 5.1 ___/2P.

Von einem radioaktiven Element ist nach 90 Jahren noch ein Achtel der ursprünglichen Menge von 10 000 mg vorhanden.
Kreuze die beiden richtigen Aussagen an!

Nach 45 Jahren sind 75 % der ursprünglichen Menge zerfallen.	☐
Die Halbwertszeit beträgt 30 Jahre.	☒
Nach 180 Jahren sind noch 625 mg vorhanden.	☐
Nach 120 Jahren sind 93,75 % der ursprünglichen Menge zerfallen.	☒
Nach 15 Jahren sind noch genau 7500 mg vorhanden.	☐

3. FA-R 5.1 ___/2P.

Ein radioaktiver Zerfall verlaufe nach dem folgenden Zerfallsgesetz.
Gib das Zerfallsgesetz mit Hilfe der Zahl e an!
Wie groß ist die Zerfallskonstante λ?

$$N(t) = 15\,000 \cdot 0{,}96^t$$

$$\begin{aligned} N(t) &= 15000 \cdot 0{,}96^t \\ e^{-\lambda} &= 0{,}96 \\ -\lambda \cdot \ln e &= \ln 0{,}96 \\ \lambda &\approx 0{,}04082199452\ldots \\ N(t) &= 15000 \cdot e^{-0{,}04082 \cdot t} \end{aligned}$$

4. FA-R 5.1 ___/2P.

Gegeben sind fünf Funktionsgleichungen. Welche davon beschreiben eine exponentielle Abnahme? Kreuze die zutreffende(n) Funktionsgleichung(en) an!

$f(x) = 0{,}9 \cdot 1{,}02^x$	☐
$g(x) = 1{,}02 \cdot 0{,}9^x$	☒
$h(t) = 0{,}8 \cdot e^{0{,}2 \cdot t}$	☐
$N(t) = 2 \cdot e^{-3 \cdot t}$	☒
$y(x) = 1 - e \cdot x$	☐

5. FA-R 5.1 ___/2P.

Gib jeweils die Funktionsgleichung einer Exponentialfunktion $N(t) = N_0 \cdot a^t$ an (t in Tagen), für die gilt:
Die Funktionswerte nehmen täglich um 4 % ab:

$$N(t) = N_0 \cdot 0{,}96^t$$

Der Graph von N verläuft durch den Punkt P(0|3) und die Funktionswerte nehmen pro Tag um 8 % zu:

$$N(t) = 3 \cdot 1{,}08^t$$

6. FA-R 5.1 ___/2P.

Die Funktion f beschreibt eine exponentielle Änderung.
Ergänze die fehlenden Funktionswerte und bestimme die Funktionsgleichung von f.

t	0	2	4	6
$f(t)$	1600	400	100	25

$f(t) = 1600 \cdot 0{,}5^t$

$f(2) = 400 = f(0) \cdot a^2$
$f(4) = 100 = f(0) \cdot a^4$

$$\frac{400}{a^2} = \frac{100}{a^4} \quad | \cdot a^4$$
$$400a^4 = 100a^2 \quad |: 100a^2 \ (\neq 0)$$
$$4a^2 = 1$$
$$a^2 = \frac{1}{4}$$
$$a = \frac{1}{2}$$

7. FA-R 5.1 ___/2P.

Der Flächeninhalt eines Ölteppichs beträgt momentan 1,5 km² und wächst täglich um 5 %.
Nach wie vielen Tagen ist der Ölteppich erstmals größer als 2 km²?

$$1{,}5 \cdot 1{,}05^d > 2$$
$$d > 5{,}896$$

Nach 6 Tagen ist der Ölteppich erstmals größer als 2 km².

8. FA-R 5.2 ___/2P.

Die folgende Formel gibt näherungsweise den Zusammenhang zwischen der Zeit t (in Tagen) und der Menge des radioaktiven Isotops Barium-140 $N(t)$ (in mg) wieder:

$$N(t) = N_0 \cdot e^{-0{,}053319 \cdot t}$$

Überprüfe rechnerisch die folgende Aussage: „Nach 13 Tagen beträgt die Menge des radioaktiven Isotops rund die Hälfte der Ausgangsmenge."

$$N(13) = N_0 \cdot e^{-0{,}053319 \cdot 13} = N_0 \cdot 0{,}50$$

Ja, die Behauptung stimmt!

9. FA-R 5.3 ___/2P.

Ein Körper mit der Temperatur 80°C wird in einen Kühlraum gestellt.
Dabei nimmt seine Temperatur pro Stunde um 20 % ab.
Nach welcher Zeit ist die Temperatur unter 15° gesunken?

Nach ca. 7h 30 min.

10. FA-R 5.4 ___/2P.

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = 40 \cdot 1{,}98^x$.
Welche der folgenden Aussagen trifft/treffen auf diese Funktion zu?
Kreuze die zutreffende(n) Aussage(n) an!

Der Graph der Funktion f verläuft durch den Punkt $P = (40\|0)$.	☐
Die Funktion f ist im Intervall $[0; 4]$ streng monoton steigend.	☒
Wenn man den Wert des Arguments x um 4 vergrößert, wird der Funktionswert 40-mal so groß.	☐
Der Funktionswert $f(x)$ ist positiv für alle $x \in \mathbb{R}$.	☒
Wenn man den Wert des Arguments x um 1 vergrößert, wird der zugehörige Funktionswert um 98 % größer.	☒

11. FA-R 5.5 ___/2P.

Francium ist ein radioaktives Element.
Die nach t Minuten noch vorhandene Menge wird durch die Funktion f mit der Gleichung $f(t) = a \cdot e^{-\lambda \cdot t}$ angegeben, wobei a die ursprünglich vorhandene Menge des Elements bezeichnet. Die Halbwertszeit von Francium beträgt 22 Minuten.
Ermittle den Parameter λ (auf Zenttausendstel genau)!

$\lambda = -0{,}0315$

12. FA-R 5.5 ___/2P.

Für eine medizinische Untersuchung wird das radioaktive Isotop ${}^{99m}_{43}\mathrm{Tc}$ (Technetium) künstlich hergestellt. Dieses Isotop hat eine Halbwertszeit von 6,01 Stunden.
Gib an, wie lange es dauert, bis von einer bestimmten Ausgangsmenge Technetiums weniger als ein Viertel vorhanden ist!

Es dauert 12,02 Stunden.

2.3. Typ-2-artige-Aufgaben

Ausgleichsaufgaben mit ☺ gekennzeichnet!
Rechne mit exakten Werten und runde gegebenenfalls auf 2 Dez.!

1. Die Bevölkerung mancher Städte wächst exponentiell.

a) Im Jahr 1990 hatte eine solche Stadt ca. 30 000 Einwohner, 2010 waren es bereits 41 000. Erstelle eine Formel, mit der du die Einwohnerzahl dieser Stadt für ein bestimmtes Jahr abschätzen kannst. ___/2P. ☺

b) Die Bevölkerung einer anderen exponentiell wachsenden Stadt wächst jährlich um 1,4 %. Im Jahr 2000 hatte diese Stadt ca. 38 000 Einwohner.
Berechne die zu erwartende Einwohnerzahl für 2025 (auf Hunterter gerundet)! ___/2P.

c) Erkläre, wie du berechnen kannst, wann die Stadt aus b) die 40 000-Einwohner-Grenze überschritt! ___/2P.

d) Im Jahr 2012 lebten 45 000 Menschen in der Stadt aus b).
Hat das Bevölkerungswachstum im Zeitraum von 2000 bis 2012 im Vergleich zum expoentiellen Modell aus b) zu- oder abgenommen? Begründe deine Antwort! ___/2P.

a)

$$N(t) = N_0 \cdot a^t$$
$$41\,000 = 30\,000 \cdot a^{20}$$
$$a \approx 1{,}015741344$$
$$N(t) = 30\,000 \cdot 1{,}015741344^t$$

b)

$$N(t) = N_0 \cdot a^t$$
$$N(25) = 38\,000 \cdot 1{,}014^{25}$$
$$N(25) \approx 53\,800$$

c) Setze in die Wachstumsformel für $N_0 = 38\,000$ ein, für $N(t) = 40\,000$ und für $a = 1{,}014$. Weil der Exponent t gesucht ist, muss man die Gleichung logarithmieren. Dann wird noch t ausgedrückt.

$$N(t) = N_0 \cdot a^t$$
$$40\,000 = 38\,000 \cdot 1{,}014^t \quad |: 38\,000$$
$$1{,}05 = 1{,}014^t \quad |ln$$
$$\ln 1{,}05 = t \cdot \ln 1{,}014 \quad |: \ln 1{,}014$$
$$t \approx 3{,}69$$

Die Stadt überschritt im Jahr 2004 die 40 000-Einwohner-Grenze!

d) $N(12) = 38\,000 \cdot 1{,}014^{12} = 44\,899{,}25$
Bei gleichem Wachstum wären es rund 44 900 Personen gewesen, daher hat das Wachstum leicht zugenommen.

2. Radioaktive Zerfallsvorgänge verlaufen nach den Gesetzmäßigkeiten von exponentiellen Änderungen. Radioaktiver Kohlenstoff (^{14}C) besitzt eine Halbwertszeit von ca. 5730 Jahren.

a) Berechne, welcher Prozentsatz der vorhandenen Menge ^{14}C pro Jahr zerfällt! ___/**1P.** ☺

b) Berechne, welcher Prozentsatz der Ausgangsmenge nach 10 000 Jahren noch vorhanden ist! ___/**1P.** ☺

c) In einem Skelettknochen, der bei Ausgrabungsarbeiten gefunden wurde, sind noch 67 % der ursprünglichen ^{14}C -Menge enthalten. Berechne das Alter des Knochens! ___/2P.

d) Um die ^{14}C -Methode zur Altersbestimmung anwenden zu können, muss noch mindestens $\frac{1}{1000}$ der Ausgangsmenge an ^{14}C in der Probe enthalten sein.
Berechne, wie viele Halbwertszeiten maximal vergangen sein dürfen, damit die ^{14}C –Methode noch anwendbar ist! ___/2P.

a)

$$\frac{1}{2} \cdot N_0 = N_0 \cdot a^{5730}$$
$$a \approx 0{,}999879$$

0,012 % zerfällt pro Jahr

b) $a^{10\,000} = 0{,}29829$

29,83 % der Ausgangsmenge ist nach 10 000 Jahren noch vorhanden.

c)

$$0{,}67 \cdot N_0 = N_0 \cdot 0{,}99^t \quad | \ln$$
$$t = \frac{\ln 0{,}67}{\ln 0{,}99}$$
$$t \approx 3310{,}60$$

Der Knochen ist rund 3311 Jahre alt.

d)

$$\frac{1}{1000} \cdot N_0 = N_0 \cdot 0{,}99^t \quad | \ln$$
$$t = \frac{\ln \frac{1}{1000}}{\ln 0{,}99}$$
$$t \approx 57103{,}94 \text{ J.}$$
$$\frac{t}{\tau} \approx 9{,}96578 \ldots$$

Es dürfen maximal 10 Halbwertszeiten vergangen sein.

3. Das radioaktive Isotop Barium 140 hat eine Halbwertszeit von 13 Tagen.

a) Stelle das Zerfallsgesetz $N(t) = N_0 \cdot a^t$ auf! ___/2P.

b) Wie viel Prozent der ursprünglich vorhandenen Menge sind nach 2 Tagen noch vorhanden? ___/2P.

c) Wenn zu Beginn der Beobachtung 3,2 mg vorhanden sind, wie viel mg zerfallen am ersten Tag? Wie viel mg zerfallen am 14. Tag? ___/2P.

d) Berechne, wann nur mehr 0,1 mg übrig sind! ___/2P.

e) Berechne, nach wie vielen Stunden 5% zerfallen sind! ___/2P.

Barium 140 $\tau = 13$ Tage

a) $N(t) = N_0 \cdot a^t$

$$\frac{1}{2} = a^{13}$$
$$a \approx 0{,}948$$
$$N(t) = N_0 \cdot 0{,}948^t$$

b) $N(2) = N_0 \cdot 0{,}948^2 = N_0 \cdot 0{,}8989$

Nach 2 Tagen sind rund 89,89 % der ursprünglichen Menge vorhanden.

c) $N_0 = 3{,}2$ mg

$N(1) = 3{,}2 \cdot 0{,}948^1 \approx 3{,}03$ mg

Am ersten Tag zerfallen rund 0,17 mg.

$N(13) = 3{,}2 \cdot 0{,}948^{13} = 1{,}6$ mg

$N(14) = 3{,}2 \cdot 0{,}948^{14} \approx 1{,}52$ mg

Am 14. Tag zerfallen rund 0,083 mg.

d) $N(t) = 0{,}1$ mg

$N(t) = 3{,}2 \cdot 0{,}948^t = 0{,}1$

$0{,}948^t = 0{,}03125$

$t \cdot \ln 0{,}948 = \ln 0{,}03125$

$t \approx 65$ T.

Nach 65 Tagen sind nur mehr 0,1 mg übrig.

e) 5 % zerfallen $N(t) = N_0 \cdot 0{,}95$

$0{,}95 \cdot 3{,}2 = 3{,}2 \cdot 0{,}948^t$

$t \cdot \ln 0{,}948 = \ln 0{,}95$

$t \approx 0{,}962$ T. ≈ 23 h 5 min 17 s

Nach ca. 23 Stunden sind 5 % der Ausgangsmenge zerfallen.

3. PROBESCHULARBEIT

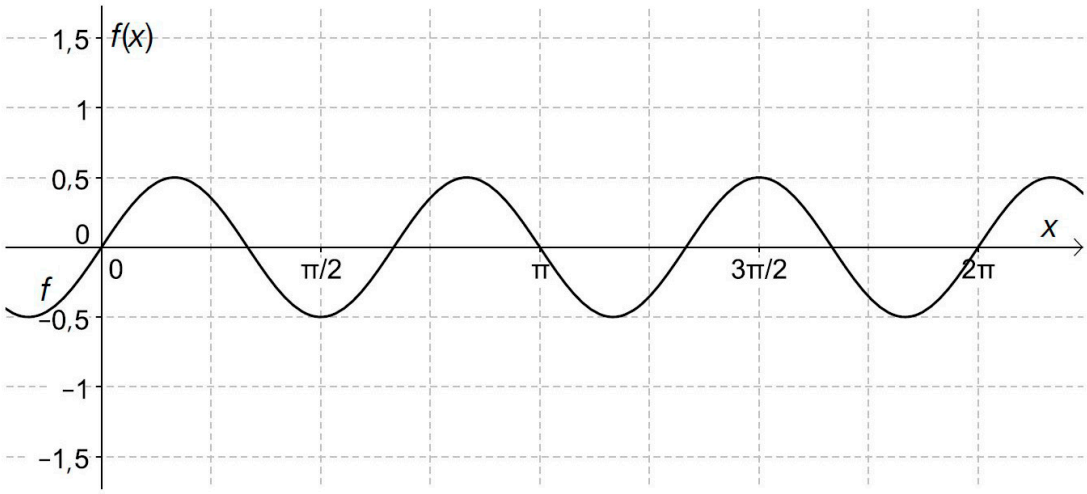
Datum: Wintersemester (3. Semester NOST)
Stoffgebiet: Reelle Funktionen, Folgen
Zeit: 50 min Teil 1, 50 min Teil 2
Grundkompetenzen:

FA-R 6.1	Graphisch oder durch eine Gleichung (Formel) gegebene Zusammenhänge der Art $f(x) = a \cdot \sin(b \cdot x)$ als allgemeine **Sinusfunktion** erkennen bzw. betrachten können; zwischen diesen Darstellungsformen wechseln können
FA-R 6.2	Aus Graphen und Gleichungen von allgemeinen Sinusfunktionen Werte(paare) ermitteln und im Kontext deuten können
FA-R 6.3	Die Wirkung der Parameter a und b kennen und die Parameter im Kontext deuten können
FA-R 6.4	Periodizität als charakteristische Eigenschaft kennen und im Kontext deuten können
FA-R 6.5	Wissen, dass $\cos(x) = \sin(x + \frac{\pi}{2})$
FA-L 7.1	**Zahlenfolgen** (insbesondere arithmetische und geometrische Folgen) durch explizite und rekursive Bildungsgesetze beschreiben und graphisch darstellen können
FA-L 7.2	Zahlenfolgen als Funktionen über $\mathbb{N}$ bzw. $\mathbb{N}^*$ auffassen können, insbesondere arithmetische Folgen als lineare Funktionen und geometrische Folgen als Exponentialfunktionen
FA-L 7.3	Definitionen monotoner und beschränkter Folgen kennen und anwenden können
FA-L 7.4	Grenzwerte von einfachen Folgen ermitteln können

3.1. Typ-1-artige-Aufgaben

1. FA-R 6.1 ___/2P.

Die nachstehende Abbildung zeigt den Graphen einer Funktion f mit $f(x) = a \cdot \sin(b \cdot x)$ mit $a, b \in \mathbb{R}$.

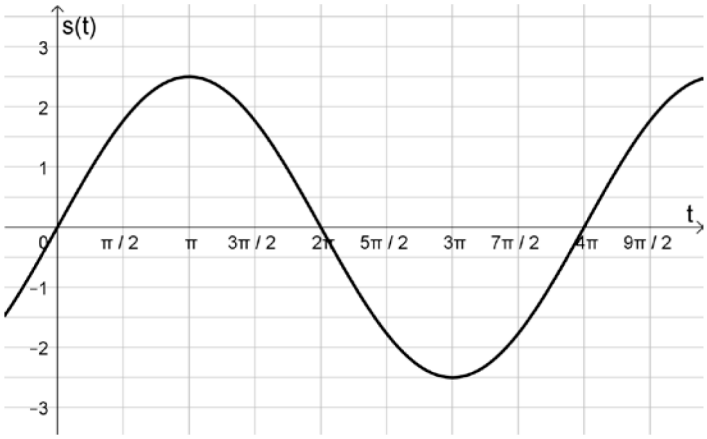


Gib die für den abgebildeten Graphen passenden Parameterwerte von f an!

$a =$ _____ $b =$ _____

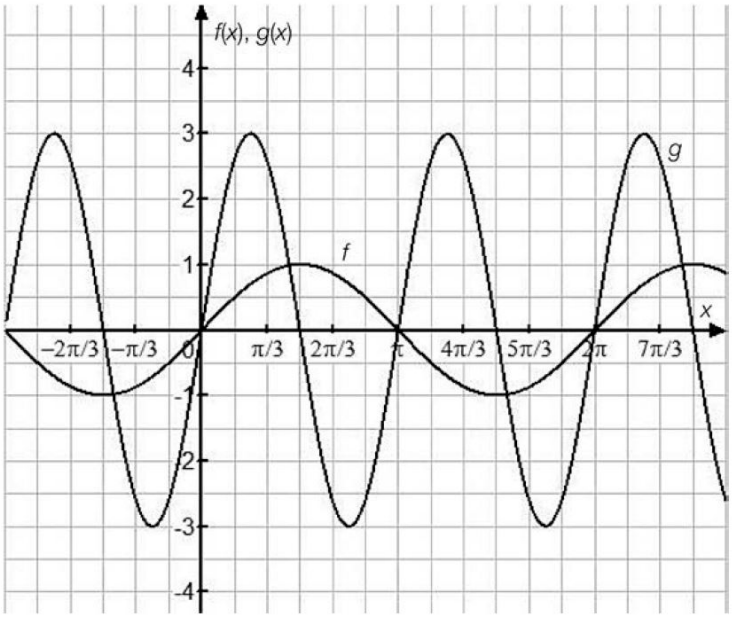
2. FA-R 6.2 ___/2P.

Gegeben ist der Graph einer harmonischen Schwingung.
Bestimme den Funktionswert der dargestellten Sinusfunktion an der Stelle π und gib die Schwingungsdauer an!



3. FA-R 6.3 ___/2P.

Die untenstehende Abbildung zeigt die Graphen von zwei Funktionen f und g, deren Gleichungen den Funktionsterm $a \cdot \sin(b \cdot x)$ haben ($a, b \in \mathbb{R}^+ \backslash \{0\}$).
Dabei wird a als Amplitude und b als Kreisfrequenz bezeichnet.

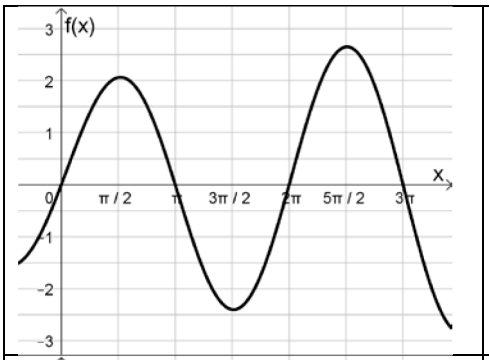
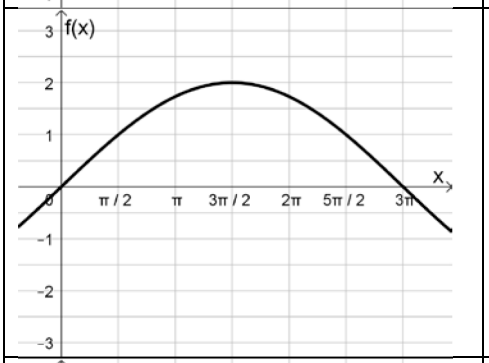
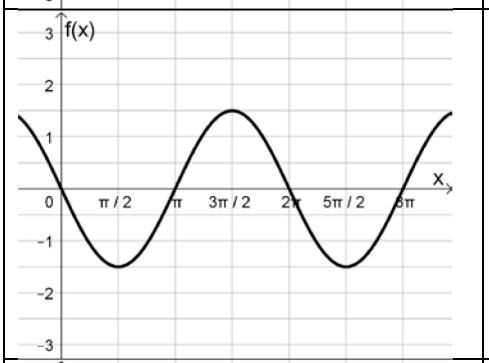
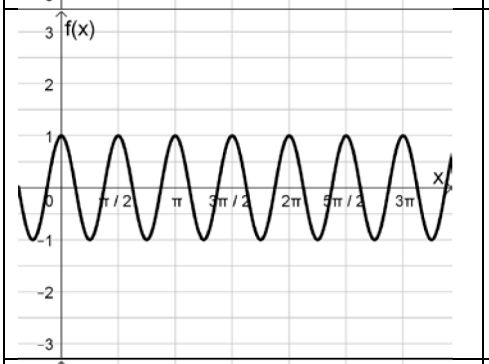
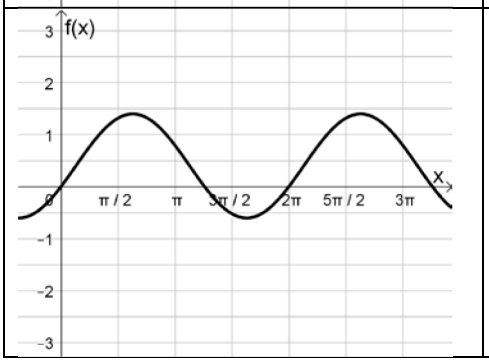


Kreuze die zutreffende(n) Aussage(n) an!

Die Amplitude von g ist dreimal so groß wie die Amplitude von f.	☐
Würde man die Kreisfrequenz von f verdreifachen, so wäre der neue Graph mit jenem von g deckungsgleich.	☐
Die Kreisfrequenz von f beträgt 1.	☐
Die Kreisfrequenz von g ist doppelt so groß wie die Kreisfrequenz von f.	☐
Eine Veränderung des Parameters a bewirkt eine Verschiebung des Graphen der Funktion in senkrechter Richtung.	☐

4. FA-R 6.3 ___/2P.

Kreuze alle jene Funktionen an, die Funktionen der Form $f(x) = a \cdot \sin(b \cdot x)$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ sind!

	☐
	☐
	☐
	☐
	☐

5. FA-R 6.4 ___/2P.

Gib für eine Funktion f mit $f(x) = a \cdot \sin(b \cdot x)$ geeignete Werte für a und b so an, dass f periodisch mit der kleinsten Periodenlänge $\frac{3\pi}{2}$ ist.

6. FA-R 6.4 ___/2P.

Gegeben ist eine reelle Funktion f mit der Funktionsgleichung $f(x) = 3 \cdot \sin(b \cdot x)$ mit $b \in \mathbb{R}$.
Einer der nachstehend angegebenen Werte gibt die (kleinste) Periodenlänge der Funktion f an.
Kreuze den zutreffenden Wert an!

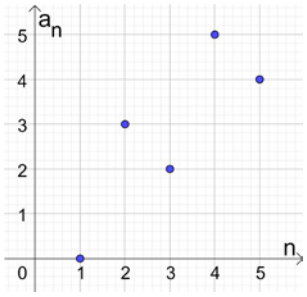
$\frac{b}{2}$	☐
b	☐
$\frac{b}{3}$	☐
$\frac{\pi}{b}$	☐
$\frac{2\pi}{b}$	☐
$\frac{\pi}{3}$	☐

7. FA-R 6.5 ___/2P.

Schreibe $f(x) = 3 \cdot \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ in der Form $f(x) = a \cdot \sin(b \cdot x + c)$ an!

8. FA-L 7.1 ___/2P.

Gib die ersten fünf Glieder der dargestellten Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ an!



9. FA-L 7.1 ___/2P.

Kreuze alle explizit dargestellten Folgen an!

$a_n = (-1) \cdot 5^n$	☐
$b_1 = 2, b_{n+1} = b_n + 3$	☐
$c_{n+1} = 2 \cdot c_n + 1$	☐
$d_n = n \cdot (n + 5)$	☐
$e_n = (n - 2) \cdot e_{n+1}$	☐

10. FA-L 7.2 ___/2P.

Kreuze die für ein lineares Modell zutreffende(n) Aussage(n) an!

Der Bestand wächst jedes Jahr um denselben Faktor.	☐
In der gleichen Zeit kommt gleich viel dazu bzw. weg.	☐
In der grafischen Darstellung liegen alle Punkte auf einer Geraden.	☐
Der Anfangswert ist größer als null.	☐
Der Bestand wächst oder sinkt monoton.	☐

11. FA-L 7.3 ___/2P.

Begründe, dass die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ mit $a_n = n(n-2)(n-4)$ nicht monoton ist!

12. FA-L 7.4 ___/2P.

Berechne den Grenzwert der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ mit $a_n = \frac{4n^2-2}{3n^2}$.

3.1. Typ-2-artige-Aufgaben

Ausgleichsaufgaben mit ☺ gekennzeichnet!
Rechne mit exakten Werten und runde gegebenenfalls auf 2 Dez.!

1. Winkelfunktionen

a) Zeichne den Graphen der Funktion f: $x \mapsto 3 \cdot \sin 2x$! ___/2P. ☺

b) Zeige, dass die Funktion f: $x \mapsto 3 \cdot \sin 2x$ periodisch ist! ___/2P.

c) Beschreibe, wie der Graph von f: $x \mapsto 3 \cdot \sin 2x$ aus dem Graphen von $x \mapsto \sin x$ hervorgeht! ___/2P.

d) Eine Schwingung hat die Elongation $s(t) = 20 \cdot \sin \frac{t}{8}$.
Berechne die Amplitude, die Frequenz und die Schwingungsdauer! ___/2P.

e) Beweise anhand der Zusammenhänge $\cos x = \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)$ und $1 = \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)$, dass für alle $x \in [0; \pi]$ gilt: $\sin\left(\frac{x}{2}\right) = \sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}$ ___/3P.

2. Ein im Vakuum frei fallender Körper legt in jeder Sekunde einen bestimmten Weg zurück. Dieser Weg ist in jeder Sekunde um den gleichen Betrag größer als in der vorhergehenden Sekunde. In der fünften Sekunde legt er 68,1 m zurück, in der achten Sekunde 94,2 m.

a) Berechne den Zuwachs des Weges pro Sekunde! ___/2P.

b) Berechne die Länge des Weges in der dritten Sekunde! ___/2P.

c) Leite die Formel $s_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d]$ für die Berechnung des Gesamtwegs nach n Sekunden her! ___/3P.

3. Fakenews

Jemand postet eine Fake-Nachricht auf einer Sozialen Plattform. Innerhalb einer Stunde verbreiten es 3 Personen. Diese geben die Nachricht in der nächsten Stunde wieder an je 3 Personen weiter, von denen noch keiner die Nachricht erfahren hat, usw.

a) Stelle ein Gesetz der zugehörigen Folge auf! ___/2P. ☺

b) Wie viele Menschen kennen die Fakenews nach 9 Stunden? ___/2P.

c) Nach wie viel Stunden sind mehr als 75 000 Menschen informiert? ___/2P.

Punkte Teil 1: _____ / 24P.

Ausgleichspunkte aus Teil 2: _____ / 4P.

Summe: _____

Für eine positive Note müssen in Teil 1 mindestens 16 Punkte (mit Berücksichtigung der Ausgleichspunkte) erreicht werden.

Punkte Teil 2 (ohne Ausgleichspunkte): _____/ 20P.

Gesamtpunktezahl: _____/48P.

Note: _____

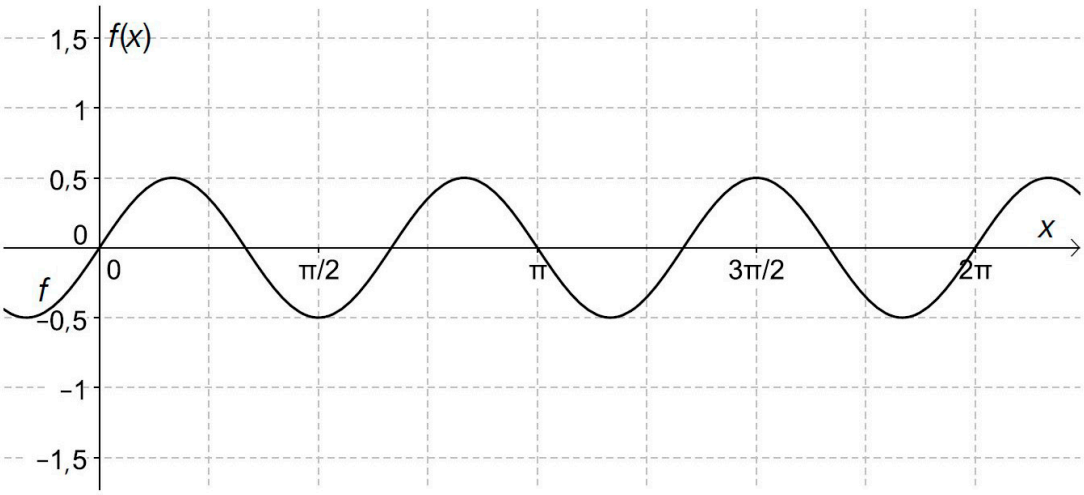
Notenschlüssel:

48 – 42	Punkte	Sehr gut
41 – 34	Punkte	Gut
33 – 24	Punkte	Befriedigend
23 – 16	Punkte	Genügend
15 – 0	Punkte	Nicht genügend

3.2. Typ-1-artige-Aufgaben

1. FA-R 6.1 ___/2P.

Die nachstehende Abbildung zeigt den Graphen einer Funktion f mit
$f(x) = a \cdot \sin(b \cdot x)$ mit $a, b \in \mathbb{R}$.

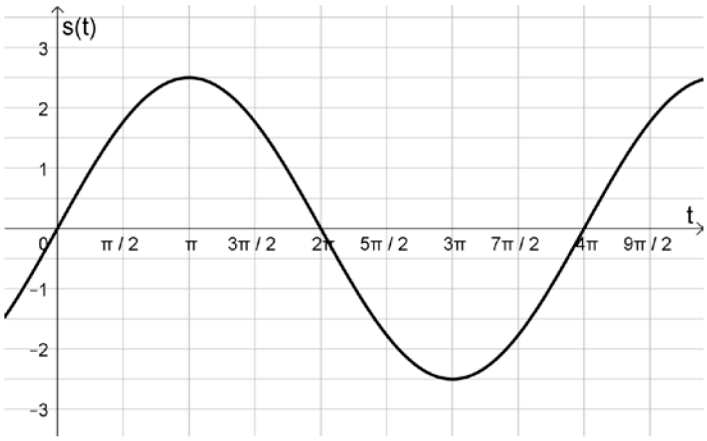


Gib die für den abgebildeten Graphen passenden Parameterwerte von f an!

$a = 0{,}5, b = 3$ oder $a = -0{,}5, b = -3$

2. FA-R 6.2 ___/2P.

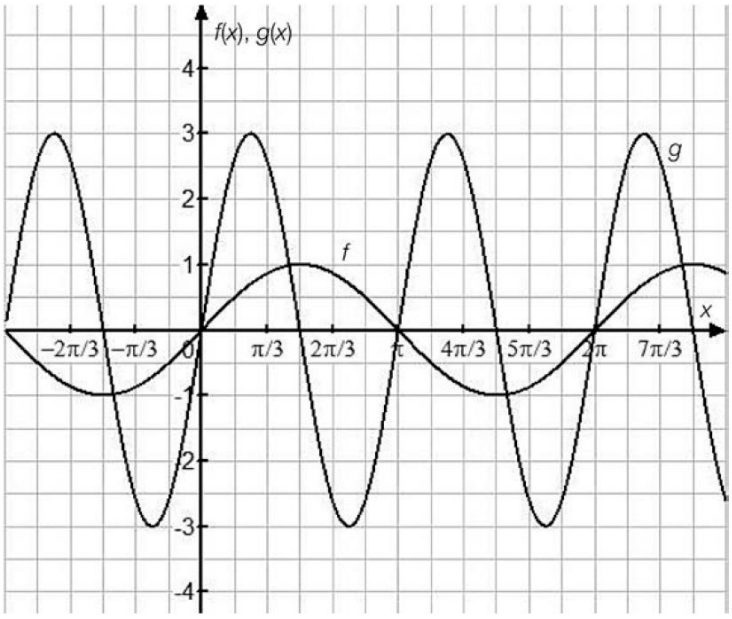
Gegeben ist der Graph einer harmonischen Schwingung.
Bestimme den Funktionswert der dargestellten Sinusfunktion an der Stelle π und gib die Schwingungsdauer an!



$s(\pi) = 2{,}5$, Schwingungsdauer: 4π

3. FA-R 6.3 ___/2P.

Die untenstehende Abbildung zeigt die Graphen von zwei Funktionen f und g, deren Gleichungen den Funktionsterm $a \cdot \sin(b \cdot x)$ haben ($a, b \in \mathbb{R}^+ \backslash \{0\}$).
Dabei wird a als Amplitude und b als Kreisfrequenz bezeichnet.

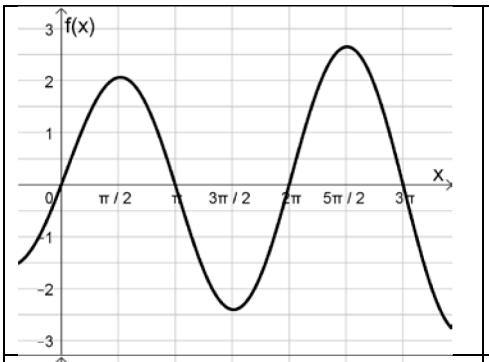
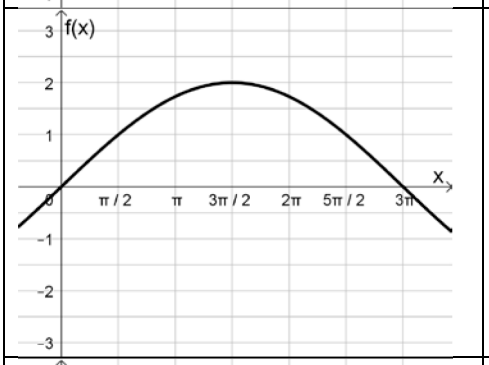
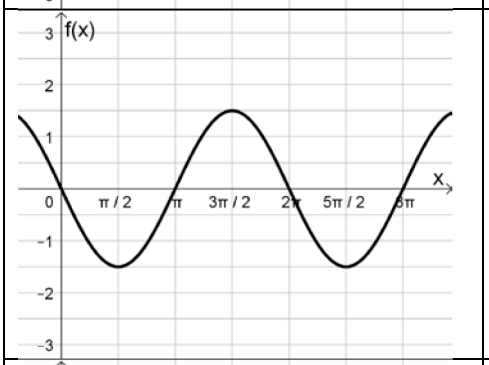
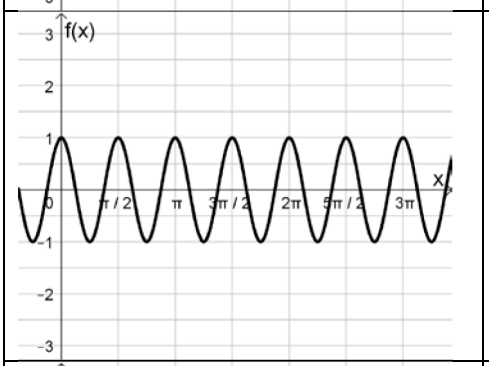
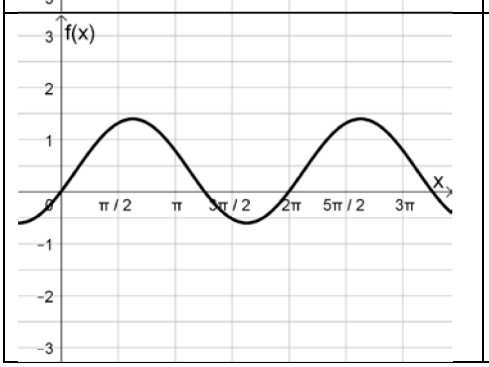


Kreuze die zutreffende(n) Aussage(n) an!

Die Amplitude von g ist dreimal so groß wie die Amplitude von f.	☒
Würde man die Kreisfrequenz von f verdreifachen, so wäre der neue Graph mit jenem von g deckungsgleich.	☐
Die Kreisfrequenz von f beträgt 1.	☒
Die Kreisfrequenz von g ist doppelt so groß wie die Kreisfrequenz von f.	☒
Eine Veränderung des Parameters a bewirkt eine Verschiebung des Graphen der Funktion in senkrechter Richtung.	☐

4. FA-R 6.3 ___/2P.

Kreuze alle jene Funktionen an, die Funktionen der Form $f(x) = a \cdot \sin(b \cdot x)$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ sind!

	☐
	☒
	☒
	☐
	☐

5. FA-R 6.4 ___/2P.

Gib für eine Funktion f mit $f(x) = a \cdot \sin(b \cdot x)$ geeignete Werte für a und b so an, dass f periodisch mit der kleinsten Periodenlänge $\frac{3\pi}{2}$ ist.

$$a \in \mathbb{R}^*$$
$$b = \frac{4}{3}$$

6. FA-R 6.4 ___/2P.

Gegeben ist eine reelle Funktion f mit der Funktionsgleichung $f(x) = 3 \cdot \sin(b \cdot x)$ mit $b \in \mathbb{R}$. Einer der nachstehend angegebenen Werte gibt die (kleinste) Periodenlänge der Funktion f an. Kreuze den zutreffenden Wert an!

$\frac{b}{2}$	☐
b	☐
$\frac{b}{3}$	☐
$\frac{\pi}{b}$	☐
$\frac{2\pi}{b}$	☒
$\frac{\pi}{3}$	☐

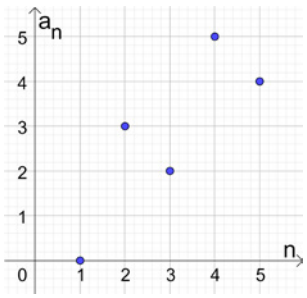
7. FA-R 6.5 ___/2P.

Schreibe $f(x) = 3 \cdot \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ in der Form $f(x) = a \cdot \sin(b \cdot x + c)$ an!

$$f(x) = 3 \cdot \sin(x + \pi)$$

8. FA-L 7.1 ___/2P.

Gib die ersten fünf Glieder der dargestellten Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ an!



$a_1 = 0$, $a_2 = 3$, $a_3 = 2$, $a_4 = 5$, $a_5 = 4$

9. FA-L 7.1 ___/2P.

Kreuze alle explizit dargestellten Folgen an!

$a_n = (-1) \cdot 5^n$	☒
$b_1 = 2, b_{n+1} = b_n + 3$	☐
$c_{n+1} = 2 \cdot c_n + 1$	☐
$d_n = n \cdot (n+5)$	☒
$e_n = (n-2) \cdot e_{n+1}$	☐

10. FA-L 7.2 ___/2P.

Kreuze die für ein lineares Modell zutreffende(n) Aussage(n) an!

Der Bestand wächst jedes Jahr um denselben Faktor.	☐
In der gleichen Zeit kommt gleich viel dazu bzw. weg.	☒
In der grafischen Darstellung liegen alle Punkte auf einer Geraden.	☒
Der Anfangswert ist größer als null.	☐
Der Bestand wächst oder sinkt monoton.	☒

11. FA-L 7.3 ___/2P.

Begründe, dass die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ mit $a_n = n(n-2)(n-4)$ nicht monoton ist!

$a_1 = 1 \cdot (-1) \cdot (-3) = 3$
$a_2 = 2 \cdot 0 \cdot (-2) = 0$
$a_3 = 3 \cdot 1 \cdot (-1) = -3$
$a_4 = 4 \cdot 2 \cdot 0 = 0$
$a_5 = 5 \cdot 3 \cdot 1 = 15$
$a_6 = 6 \cdot 4 \cdot 2 = 48$

Da eine Folge monoton ist, wenn entweder $a_n < a_{n+1}$ oder $a_n > a_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, kann für diese Folge eine Monotonie ausgeschlossen werden.

12. FA-L 7.4 ___/2P.

Berechne den Grenzwert der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ mit $a_n = \frac{4n^2-2}{3n^2}$.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{4n^2-2}{3n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{4n^2}{n^2} - \frac{2}{n^2}}{\frac{3n^2}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{4 - \frac{2}{n^2}}{3} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} 4 - \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2}{n^2}}{\lim\limits_{n\to\infty} 3} = \frac{4-0}{3} = \frac{4}{3}$$

3.3. Typ-2-artige-Aufgaben

Ausgleichsaufgaben mit ☺ gekennzeichnet!
Rechne mit exakten Werten und runde gegebenenfalls auf 2 Dez.!

1. Winkelfunktionen

a) Zeichne den Graphen der Funktion f: $x \mapsto 3 \cdot \sin 2x$! ___/2P. ☺

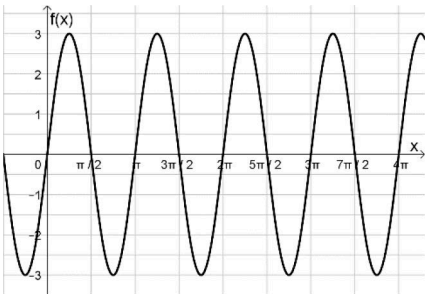
b) Zeige, dass die Funktion f: $x \mapsto 3 \cdot \sin 2x$ periodisch ist! ___/2P.

c) Beschreibe, wie der Graph von f: $x \mapsto 3 \cdot \sin 2x$ aus dem Graphen von $x \mapsto \sin x$ hervorgeht! ___/2P.

d) Eine Schwingung hat die Elongation $s(t) = 20 \cdot \sin \frac{t}{8}$.
Berechne die Amplitude, die Frequenz und die Schwingungsdauer! ___/2P.

e) Beweise anhand der Zusammenhänge $\cos x = \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)$ und $1 = \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)$, dass für alle $x \in [0; \pi]$ gilt: $\sin\left(\frac{x}{2}\right) = \sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}$ ___/3P.

a)



b) Eine Funktion f heißt periodisch mit der Periode a, wenn für alle x des Definitionsbereichs gilt: $f(x) = f(x+a)$:

$$\begin{aligned} 3 \cdot \sin 2x &= 3 \cdot \sin 2(x+a) && |:3 \\ \sin 2x &= \sin 2(x+a) && |\sin^{-1}(\sin x \text{ hat die Periode } 2\pi) \\ 2x + 2\pi &= 2(x+a) && |:2 \\ x + \pi &= x + a && |-x \\ a &= \pi \end{aligned}$$

Die Funktion ist periodisch und hat die Periode $a = \pi$

c) Der Graph geht aus dem Graphen von $x \mapsto \sin x$ durch Stauchung in Richtung der ersten Achse um den Faktor $\frac{1}{2}$ und durch Streckung in Richtung der zweiten Achse um den Faktor 3 hervor.

d) Die Amplitude ist 20, da $\sin \frac{t}{8}$ höchstens den Wert 1 annimmt.

Frequenz: $\omega = \frac{1}{8}$

$$\omega = 2\pi \cdot f$$

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{\frac{1}{8}}{2\pi} = \frac{1}{16\pi}$$

$$f \approx 0{,}01989$$

Schwingungsdauer:

$$T = \frac{1}{f} = \frac{1}{\frac{1}{16\pi}} = 16\pi$$

$$T \approx 50{,}27$$

e) I: $\cos x = \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)$

II: $1 = \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)$

II-I:

$$1 - \cos x = 2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right) \quad |:2$$
$$\sin^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1-\cos x}{2} \quad |\sqrt{}$$
$$\sin\left(\frac{x}{2}\right) = \sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}$$

2. Ein im Vakuum frei fallender Körper legt in jeder Sekunde einen bestimmten Weg zurück. Dieser Weg ist in jeder Sekunde um den gleichen Betrag größer als in der vorhergehenden Sekunde. In der fünften Sekunde legt er 68,1 m zurück, in der achten Sekunde 94,2 m.

a) Berechne den Zuwachs des Weges pro Sekunde! ___/2P.

b) Berechne die Länge des Weges in der dritten Sekunde! ___/2P.

c) Leite die Formel $s_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d]$ für die Berechnung des Gesamtwegs nach n Sekunden her! ___/3P.

a) $a_5 = 68{,}1$

$a_6 = 68{,}1 + d$

$a_7 = 68{,}1 + 2d$

$a_8 = 68{,}1 + 3d = 94{,}2 \quad | -68{,}1$

$3d = 26{,}1 \quad |:3$

$d = 8{,}7$

Der Zuwachs pro Sekunde beträgt 8,7 m.

b) Der Weg in der dritten Sekunde ist $a_3 = a_5 - 2d = 68{,}1 - 2 \cdot 8{,}7 = 50{,}7$ m

c) Den Gesamtweg s_n nach n Sekunden erhält man durch Summation der Wege in den einzelnen Sekunden:

$s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$

$s_n = a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + \cdots + (a_1 + (n-1)d)$

$s_n = n \cdot a_1 + \big(1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1)\big) \cdot d$

Berechnung des Klammerausdrucks:

$1 + (n-1) = n$

$2 + (n-2) = n$

$3 + (n-3) = n$

usw.

Es gibt genau $\frac{n-1}{2}$ solcher Paare, somit gilt $\big(1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1)\big) = \frac{n\cdot(n-1)}{2}$.

$$s_n = n \cdot a_1 + \frac{n \cdot (n-1)}{2} \cdot d$$

$$s_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d]$$

3. Fakenews

Jemand postet eine Fake-Nachricht auf einer Sozialen Plattform. Innerhalb einer Stunde verbreiten es 3 Personen. Diese geben die Nachricht in der nächsten Stunde wieder an je 3 Personen weiter, von denen noch keiner die Nachricht erfahren hat, usw.

a) Stelle ein Gesetz der zugehörigen Folge auf! ___**/2P.** ☺

b) Wie viele Menschen kennen die Fakenews nach 9 Stunden? ___/2P.

c) Nach wie viel Stunden sind mehr als 75 000 Menschen informiert? ___/2P.

a) In der ersten Stunde erfahren sie 3 Personen.
In der zweiten Stunde erfahren sie $3^2 = 9$ Personen.
In der dritten Stunde erfahren sie 3^3 Personen.
…
In der n-ten Stunde erfahren sie 3^n Personen.
a_n sei die Anzahl der Personen, die sie in der n-ten Stunde erfahren, dann gilt: $a_n = 3^n$.

b) Nach 9 Stunden wissen das Gerücht $1 + 3 + 3^2 + \cdots + 3^9$ Personen.
Es handelt sich um eine geometrische Reihe von 10 Gliedern mit dem Anfangsglied $a_1 = 1$ und dem Quotienten $q = 3$.

$$s_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

$$s_{10} = 1 \cdot \frac{3^{10} - 1}{3 - 1} = 29\,524$$

Nach 9 Stunden kennen 29 524 Personen das Gerücht.

c)

$$1 \cdot \frac{3^n - 1}{3 - 1} > 75\,000 \quad | \cdot 2$$

$$3^n - 1 > 150\,000 \quad | + 1$$

$$3^n > 150\,001 \quad | \ln$$

$$n \cdot \ln 3 > \ln 150\,001 \quad | : \ln 3 \quad (> 0)$$

$$n > 10{,}85$$

Nach 10 Stunden ($n = 11$) sind mehr als 75 000 Personen informiert.

4. PROBESCHULARBEIT

Datum: Sommersemester (4. Semester NOST)
Stoffgebiet: Reihen, Vektoren und analytische Geometrie in $\mathbb{R}^3$
Zeit: 50 min Teil 1, 50 min Teil 2
Grundkompetenzen:

FA-L 8.1	Den Begriff der Summe einer unendlichen **Reihe** definieren können
FA-L 8.2	Endliche arithmetische und geometrische Reihen kennen und ihre Summen berechnen können
FA-L 8.3	Summen konvergenter geometrischer Reihen berechnen können
FA-L 8.4	Folgen und Reihen zur Beschreibung diskreter Prozesse in anwendungsorientierten Bereichen einsetzen können
AG-R 3.1	**Vektoren** als Zahlentupel verständig einsetzen und im Kontext deuten können
AG-R 3.2	Vektoren geometrisch (als Punkte bzw. Pfeile) deuten und verständig einsetzen können
AG-R 3.3	Definition der Rechenoperationen mit Vektoren (Addition, Multiplikation mit einem Skalar, Skalarmultiplikation) kennen; Rechenoperationen verständig einsetzen und (auch geometrisch) deuten können

4.1. Typ-1-artige-Aufgaben

1. FA-L 8.1 ___/2P.

Gegeben ist die Reihe $\sum_{k=4}^{8}(3k+2)$.
Kreuze die beiden zutreffenden Aussagen an!

Es handelt sich um eine endliche geometrische Reihe.	☐
$\sum_{k=4}^{8}(3k+2) = 5+8+11+14$	☐
$\sum_{k=4}^{8}(3k+2) = 14+17+20+23+26$	☐
$\sum_{k=4}^{8}(3k+2) = \sum_{k=1}^{4}(3k+2)$	☐
Es handelt sich um eine endliche arithmetische Reihe.	☐

2. FA-L 8.2 ___/2P.

Kreuze alle Aussagen, die auf die Reihe $1+3+5+7+9+\cdots+31$ zutreffen, an.

$s_{16} = (1+31)\cdot\frac{16}{2}$	☐
$s_{16} = 1\cdot\frac{1-2^{16}}{1-2}$	☐
$s_{31} = (1+31)\cdot\frac{31}{2}$	☐
$s_{31} = 1\cdot\frac{1-2^{31}}{1-2}$	☐
$s_{100} = 10\,000$	☐

3. FA-L 8.2 ___/2P.

Berechne die Summe der endlichen geometrischen Reihe $3 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + \cdots + 3^{10}$!

4. FA-L 8.3 ___/2P.

Berechne die Summe der unendlichen geometrischen Reihe $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \cdots$!

5. FA-L 8.4 ___/2P.

Ein Kapital von 10 000 € wird 20 Jahre lang angelegt. Zuerst liegt es 5 Jahre lang zu 2 % p.a., dann 7 Jahre zu 1,5 % p.a., 4 Jahre zu 1,2 % p.a. und die letzten 4 Jahre zu 0,9 % p.a.
Berechne den Endwert des angelegten Kapitals!

6. AG-R 3.1 ___/2P.

Die Gehälter der 5 Mitarbeiter einer Firma sind im Vektor $G = \begin{pmatrix} G_1 \\ G_2 \\ \vdots \\ G_5 \end{pmatrix}$ dargestellt.

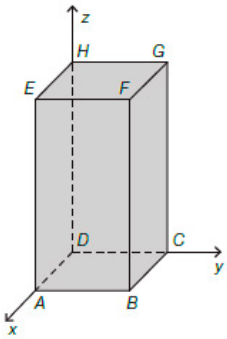
Gib an, was der Ausdruck (das Skalarprodukt) $G \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ in diesem Kontext bedeutet!

7. AG-R 3.2 ___/2P.

Von einem Parallelogramm kennt man die Eckpunkte $A = (-1|2|-3)$, $B = (4|-5|-2)$ und $C = (1|0|5)$. Bestimme den fehlenden Eckpunkt D dieses Parallelogramms!

8. AG-R 3.2 ___/2P.

Die nachstehende Abbildung zeigt einen Quader, dessen quadratische Grundfläche in der xy-Ebene liegt. Die Länge einer Grundkante beträgt 7 Längeneinheiten, die Körperhöhe beträgt 14 Längeneinheiten. Der Eckpunkt D liegt im Koordinatenursprung, der Eckpunkt C liegt auf der positiven y-Achse. Der Eckpunkt E hat somit die Koordinaten $\mathrm{E} = (7|0|14)$.



Gib die Koordinaten des Vektors $\overrightarrow{\mathrm{EC}}$ an!

9. AG-R 3.3 ___/2P.

Die gegebene Strecke AB wird innen durch den Punkt T im Verhältnis 3 : 2 geteilt.
Stelle eine Formel für die Berechnung des Punkts T auf!

T = _____

10. AG-R 3.3 ___/2P.

Gegeben ist der Vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Bestimme die Koordinate z_b des Vektors $\vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ z_b \end{pmatrix}$ so, dass $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufeinander normal stehen!

11. AG-R 3.3 ___/2P.

Gegeben sind die Vektoren $A = (1|-5|-12)$ und $B = (-3|9|8)$.
Kreuze jene Punkte C an, die mit A und B ein rechtwinkliges Dreieck bilden!

$C = (15\|-3\|20)$	☐
$C = (12\|-6\|9)$	☐
$C = (12\|-9\|-6)$	☐
$C = (10\|-11\|-6)$	☐
$C = 8\|-4\|4)$	☐

12. AG-R 3.3 ___/2P.

Von einem Rechteck kennt man die Eckpunkte $A = (4|1|2)$, $B = (2|6|-1)$ und $C = (7|8|-1)$. Ermittle den Flächeninhalt dieses Rechtecks!

4.1. Typ-2-artige-Aufgaben

Ausgleichsaufgaben mit ☺ gekennzeichnet!
Rechne mit exakten Werten und runde gegebenenfalls auf 2 Dez.!

1. Drei aufeinanderfolgende Glieder einer arithmetischen Folge haben die Summe 24. Die Summe ihrer Quadrate ist 210. Berechne diese drei Zahlen! ___/10P.

2. Gegeben sind die Punkte $A = (6|6|8)$, $B = (4|3|9)$ und $C = (2|-3|-1)$ eines Parallelogramms.

a) Zeige durch Berechnung, dass der fehlende Eckpunkt D des Parallelogramms durch $D = (4|0|-2)$ bestimmt wird. **___/2P.** ☺

b) Berechne den Flächeninhalt des Parallelogramms ABCD! **___/2P.** ☺

3. Von einem geraden dreiseitigen Prisma mit der Grundfläche ABC und der Deckfläche DEF kennt man $A = (0|0|0)$, $B = (2|7|-10)$, $C = (-2|-1|4)$ und $D = (6|y|z)$.
Berechne die fehlenden Eckpunkte und das Volumen dieses Prismas! ___/10P.

Punkte Teil 1: _____ / 24P.

Ausgleichspunkte aus Teil 2: _____ / 4P.

Summe: _____
Für eine positive Note müssen in Teil 1 mindestens 16 Punkte (mit Berücksichtigung der Ausgleichspunkte) erreicht werden.

Punkte Teil 2 (ohne Ausgleichspunkte): _____/ 20P.

Gesamtpunktezahl: _____/48P.

Note: _____

Notenschlüssel:

48 – 42	Punkte	Sehr gut
41 – 34	Punkte	Gut
33 – 24	Punkte	Befriedigend
23 – 16	Punkte	Genügend
15 – 0	Punkte	Nicht genügend

4.2. Typ-1-artige-Aufgaben

1. FA-L 8.1 ___/2P.

Gegeben ist die Reihe $\sum_{k=4}^{8}(3k+2)$.
Kreuze die beiden zutreffenden Aussagen an!

Es handelt sich um eine endliche geometrische Reihe.	☐
$\sum_{k=4}^{8}(3k+2) = 5+8+11+14$	☐
$\sum_{k=4}^{8}(3k+2) = 14+17+20+23+26$	☒
$\sum_{k=4}^{8}(3k+2) = \sum_{k=1}^{4}(3k+2)$	☐
Es handelt sich um eine endliche arithmetische Reihe.	☒

2. FA-L 8.2 ___/2P.

Kreuze alle Aussagen, die auf die Reihe $1+3+5+7+9+\cdots+31$ zutreffen, an.

$s_{16} = (1+31)\cdot\frac{16}{2}$	☒
$s_{16} = 1\cdot\frac{1-2^{16}}{1-2}$	☐
$s_{31} = (1+31)\cdot\frac{31}{2}$	☐
$s_{31} = 1\cdot\frac{1-2^{31}}{1-2}$	☐
$s_{100} = 10\,000$	☒

3. FA-L 8.2 ___/2P.

Berechne die Summe der endlichen geometrischen Reihe $3+3^2+3^3+3^4+\cdots+3^{10}$!

$$s_{10} = \sum_{i=1}^{10} b_i = b_1\cdot\frac{1-q^{10}}{1-q} = 3\cdot\frac{1-3^{10}}{1-3} = 3\cdot\frac{-59\,048}{-2} = 3\cdot 29\,524 = 88\,572$$

4. FA-L 8.3 ___/2P.

Berechne die Summe der unendlichen geometrischen Reihe $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\cdots$!

$$s = 1-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{4}-\tfrac{1}{8}+\cdots \qquad b_1 = 1,\ b_2 = b_1\cdot\left(-\tfrac{1}{2}\right) \Rightarrow q = -\tfrac{1}{2}$$

$$s = b_1\cdot\frac{1}{1-q} = 1\cdot\frac{1}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{1}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}$$

5. FA-L 8.4 ___/2P.

Ein Kapital von 10 000 € wird 20 Jahre lang angelegt. Zuerst liegt es 5 Jahre lang zu 2 % p.a., dann 7 Jahre zu 1,5 % p.a., 4 Jahre zu 1,2 % p.a. und die letzten 4 Jahre zu 0,9 % p.a.
Berechne den Endwert des angelegten Kapitals!

$$10\,000 \cdot 1{,}02^5 \cdot 1{,}015^7 \cdot 1{,}012^4 \cdot 1{,}009^4 = 13\,321{,}40\ €$$

6. AG-R 3.1 ___/2P.

Die Gehälter der 5 Mitarbeiter einer Firma sind im Vektor $G = \begin{pmatrix} G_1 \\ G_2 \\ \vdots \\ G_5 \end{pmatrix}$ dargestellt.

Gib an, was der Ausdruck (das Skalarprodukt) $G \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ in diesem Kontext bedeutet!

Der Ausdruck gibt die Summe der Gehälter der 5 Mitarbeiter der Firma an.

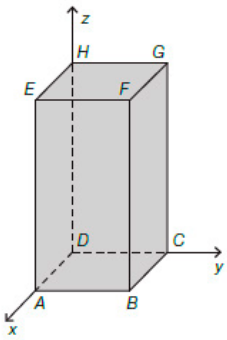
7. AG-R 3.2 ___/2P.

Von einem Parallelogramm kennt man die Eckpunkte $A = (-1|2|-3)$, $B = (4|-5|-2)$ und $C = (1|0|5)$. Bestimme den fehlenden Eckpunkt D dieses Parallelogramms!

$$D = A + \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix}$$

8. AG-R 3.2 ___/2P.

Die nachstehende Abbildung zeigt einen Quader, dessen quadratische Grundfläche in der xy-Ebene liegt. Die Länge einer Grundkante beträgt 7 Längeneinheiten, die Körperhöhe beträgt 14 Längeneinheiten. Der Eckpunkt D liegt im Koordinatenursprung, der Eckpunkt C liegt auf der positiven y-Achse. Der Eckpunkt E hat somit die Koordinaten $E = (7|0|14)$.



Gib die Koordinaten des Vektors $\overrightarrow{EC}$ an!

$$\overrightarrow{EC} = \begin{pmatrix} -7 \\ 7 \\ -14 \end{pmatrix}$$

9. AG-R 3.3 ___/2P.

Die gegebene Strecke AB wird innen durch den Punkt T im Verhältnis 3 : 2 geteilt.
Stelle eine Formel für die Berechnung des Punkts T auf!

$T = A + \frac{3}{5} \cdot \overrightarrow{AB}$ oder $T = \frac{2}{5} \cdot A + \frac{3}{5} \cdot B$

10. AG-R 3.3 ___/2P.

Gegeben ist der Vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Bestimme die Koordinate z_b des Vektors $\vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ z_b \end{pmatrix}$ so, dass $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufeinander normal stehen!

$$z_b = -9$$

11. AG-R 3.3 ___/2P.

Gegeben sind die Vektoren $A = (1|-5|-12)$ und $B = (-3|9|8)$.
Kreuze jene Punkte C an, die mit A und B ein rechtwinkliges Dreieck bilden!

$C = (15\|-3\|20)$	☒
$C = (12\|-6\|9)$	☐
$C = (12\|-9\|-6)$	☐
$C = (10\|-11\|-6)$	☒
$C = (8\|-4\|4)$	☒

12. AG-R 3.3 ___/2P.

Von einem Rechteck kennt man die Eckpunkte $A = (4|1|2)$, $B = (2|6|-1)$ und $C = (7|8|-1)$. Ermittle den Flächeninhalt dieses Rechtecks!

$$A = a \cdot b = |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{BC}| = \left|\begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{38} \cdot \sqrt{29} \approx 33{,}20$$

4.3. Typ-2-artige-Aufgaben

Ausgleichsaufgaben mit ☺ gekennzeichnet!
Rechne mit exakten Werten und runde gegebenenfalls auf 2 Dez.!

1. Drei aufeinanderfolgende Glieder einer arithmetischen Folge haben die Summe 24.
Die Summe ihrer Quadrate ist 210. Berechne diese drei Zahlen! ___/10P.

arithmetische Folge: $a_{n+1} = a_n + k$

$a_{n+2} = a_{n+1} + k = a_n + k + k = a_n + 2k$

$$a_n + a_{n+1} + a_{n+2} = 24$$
$$a_n + a_n + k + a_n + 2k = 24$$
$$3a_n + 3k = 24 \quad |:3$$
$$a_n + k = 8 \quad |-k$$
$$a_n = 8 - k$$

$$a_n^2 + a_{n+1}^2 + a_{n+2}^2 = 210$$
$$a_n^2 + (a_n + k)^2 + (a_n + 2k)^2 = 210$$
$$a_n^2 + a_n^2 + 2a_n k + k^2 + a_n^2 + 4a_n k + 4k^2 = 210$$
$$3a_n^2 + 6a_n k + 5k^2 = 210$$
$$3 \cdot (8-k)^2 + 6 \cdot (8-k) \cdot k + 5k^2 = 210$$
$$3 \cdot (64 - 16k + k^2) + 48k - 6k^2 + 5k^2 = 210$$
$$192 - 48k + 3k^2 + 48k - 6k^2 + 5k^2 = 210$$
$$2k^2 + 192 = 210 \quad |-192$$
$$2k^2 = 18 \quad |:2$$
$$k^2 = 9 \quad |\sqrt{}$$
$$k = \pm 3$$
$$a_n = 8 - 3 = 5$$
$$a_{n+1} = 5 + 3 = 8$$
$$a_{n+2} = 8 + 3 = 11$$

$5 + 8 + 11 = 24$ ✓ und $5^2 + 8^2 + 11^2 = 25 + 64 + 121 = 210$ ✓

2. Gegeben sind die Punkte A $= (6|6|8)$, B $= (4|3|9)$ und C $= (2|-3|-1)$ eines Parallelogramms.

c) Zeige durch Berechnung, dass der fehlende Eckpunkt D des Parallelogramms durch $D = (4|0|-2)$ bestimmt wird. ___/**2P.** ☺

d) Berechne den Flächeninhalt des Parallelogramms ABCD! ___/**2P.** ☺

a) $D = A + \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ -6 \\ -10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$

b) $A = |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}| = \left| \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 \\ -6 \\ -10 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} 36 \\ -22 \\ 6 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{36^2 + 22^2 + 6^2} = \sqrt{1816} \approx 42{,}61$

3. Von einem geraden dreiseitigen Prisma mit der Grundfläche ABC und der Deckfläche DEF kennt man $A = (0|0|0)$, $B = (2|7|-10)$, $C = (-2|-1|4)$ und $D = (6|y|z)$.
Berechne die fehlenden Eckpunkte und das Volumen dieses Prismas! ___/10P.

$A = (0|0|0)$
$B = (2|7|-10)$
$C = (-2|-1|4)$
$D = (6|y|z)$

$\overrightarrow{AD}$ steht auf $\overrightarrow{AB}$ normal:

$$\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$$
$$\begin{pmatrix} 6 \\ y \\ z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ -10 \end{pmatrix} = 0$$
$$12 + 7y - 10z = 0$$

$\overrightarrow{AD}$ steht auf $\overrightarrow{AC}$ normal:

$$\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$$
$$\begin{pmatrix} 6 \\ y \\ z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} = 0$$
$$-12 - y + 4z = 0$$

$I + 7 \cdot II$:

$$-72 + 18z = 0$$
$$z = 4$$

z in II einsetzen:

$$-12 - y + 16 = 0$$
$$y = 4$$
$$D = (6|4|4)$$

$$E = B + \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ -10 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 11 \\ -6 \end{pmatrix}$$
$$F = C + \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix}$$
$$V = G \cdot h = \frac{1}{2} \cdot \left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right| \cdot h$$
$$h = \left|\overrightarrow{AD}\right| = \left|\begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{6^2 + 4^2 + 4^2} = \sqrt{68} = 2\sqrt{17}$$
$$\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right| = \left|\begin{pmatrix} 18 \\ 12 \\ 12 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{18^2 + 12^2 + 12^2} = \sqrt{612}$$
$$V = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{612} \cdot 2\sqrt{17}$$
$$V = 102$$

5. PROBESCHULARBEIT

Datum: Sommersemester (4. Semester NOST)
Stoffgebiet: Vektoren und analytische Geometrie in $\mathbb{R}^3$ und $\mathbb{R}^n$, Beschreibende Statistik
Zeit: 50 min Teil 1, 50 min Teil 2
Grundkompetenzen:

AG-L 2.7	Lineare **Gleichungssysteme** in drei Variablen lösen können
AG-R 3.4	**Geraden** durch (Parameter-)Gleichungen in $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$ angeben können; Geradengleichungen interpretieren können; Lagebeziehungen (zwischen Geraden und zwischen Punkt und Gerade) analysieren und Schnittpunkte ermitteln können
AG-L 3.8	Definition des **vektoriellen Produkts** und seine geometrische Bedeutung kennen
AG-L 3.9	Wissen, wodurch Ebenen festgelegt sind; Ebenengleichungen in Parameter- und Normalvektordarstellung aufstellen können
WS-R 1.1	**Werte** aus tabellarischen und elementaren graphischen Darstellungen ablesen (bzw. zusammengesetzte Werte ermitteln) und im jeweiligen Kontext angemessen interpretieren können
WS-R 1.2	Tabellen und einfache statistische Grafiken erstellen und zwischen Darstellungsformen wechseln können

5.1. Typ-1-artige-Aufgaben

1. AG-L 2.7 ___/2P.
Gegeben sind die drei Ebenen $\varepsilon_1: x - y = -1$, $\varepsilon_2: z = 2$ und $\varepsilon_3: 2x + y - 3z = -5$.
Kreuze ihren Schnittpunkt S an!

$S = (-1\|2\|-5)$	☐
$S = (-1\|0\|2)$	☐
$S = (2\|1\|-3)$	☐
$S = (0\|2\|-5)$	☐
$S = (0\|1\|2)$	☐
$S = (2\|3\|-3)$	☐

2. AG-R 3.4 ___/2P.
Bestimme die gegenseitige Lage der Geraden g und h und gegebenenfalls den Schnittpunkt!
g: $X = (2|0|3) + t \cdot (1|1|2)$ h: $X = (3|1|5) + u \cdot (-2|-1|4)$

3. AG-R 3.4 ___/2P.

Berechne den Abstand des Punktes $P = (-4|3|-2)$ von der Geraden g: $X = \begin{pmatrix} 7 \\ 11 \\ 9 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$!

4. AG-R 3.4 ___/2P.

Gegeben ist eine Gerade g: $X = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ mit $s \in \mathbb{R}$.

Welche der folgenden Geraden sind parallel zu g?
Kreuze die beiden zutreffenden Antworten an!

$X = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$	☐
$X = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$	☐
$X = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} + v \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix}$	☐
$X = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} + w \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$	☐
$X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} + z \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$	☐

5. AG-L 3.8 ___/2P.

Berechne jenen Vektor $\vec{n}$, der auf $\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ normal steht!

6. AG-L 3.8 ___/2P.

Kreuze die beiden richtigen Aussagen an!

Sind $\vec{a}$ und $\vec{b}$ nicht parallele und von $\vec{o}$ verschiedene Vektoren aus $\mathbb{R}^3$, dann gilt:

$\vec{a} \times \vec{b} = 0 \Rightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$	☐
$\vec{a} \times \vec{b} \perp \vec{a}$ und $\vec{a} \times \vec{b} \perp \vec{b}$	☐
$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{b} \times \vec{a}$	☐
$\lvert\vec{a} \times \vec{b}\rvert$ = Flächeninhalt des von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Parallelogramms	☐
$\vec{a} \times \vec{b} \in \mathbb{R}$	☐

7. AG-L 3.9 ___/2P.

Gib die Ebene ε, von welcher der Punkt $A = (2|0|3)$ und die beiden Richtungsvektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$ gegeben sind, in Parameterdarstellung an!

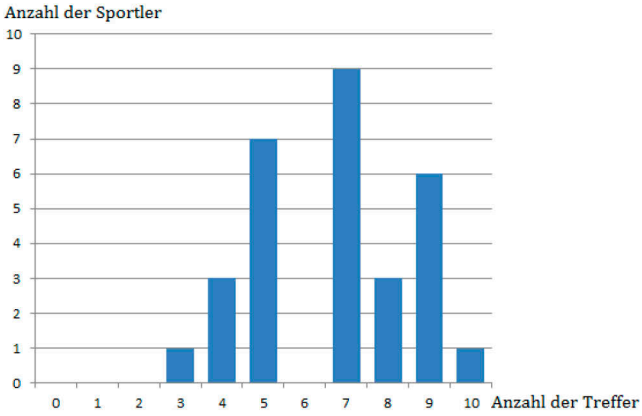
8. AG-L 3.9 ___/2P.

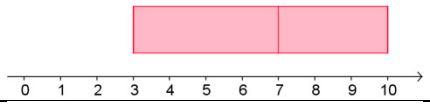
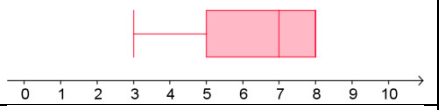
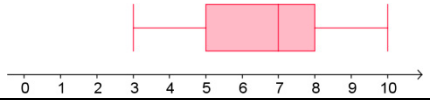
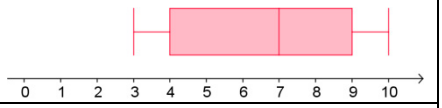
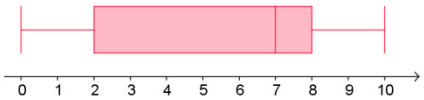
Gib die Ebene, von der drei Punkte $A = (7|-1|3)$, $B = (2|4|-3)$ und $C = (0|-2|5)$ gegeben sind, in Normalvektordarstellung an!

9. WS-R 1.1 ___/2P.

Ein Basketballtrainer möchte wissen, wie gut seine Basketballer Körbe werfen können. Er lässt jeden Sportler zehn Körbe werfen und notiert anschließend, wie viele Treffer erzielt wurden.

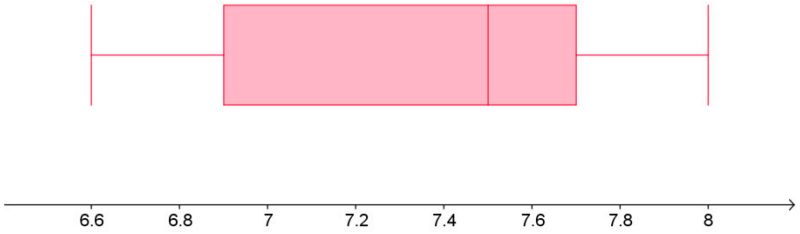
Kreuze das passende Kastenschaubild an!



A ☐		D ☐	
B ☐		E ☐	
C ☐			

10. WS-R 1.1 ___/2P.

Um den Benzinverbrauch seines Autos zu kontrollieren, schreibt Herr A stets auf, wie viel Liter sein Auto pro 100 km verbraucht. Diese Daten sind hier zusammengefasst in Form eines Diagramms dargestellt:



Setze in den folgenden Aussagen die richtigen Zahlen ein:
Aus dem Diagramm kann man entnehmen, dass ...

... ca. 50% der Werte kleiner als _____ Liter sind.

... jeder Verbrauch pro 100 km mindestens _____ Liter beträgt.

... von den 200 Messwerten ca. _____ Werte mindestens 7,7 sind.

... von den 200 Messwerten ca. _____ Werte größer als 6,9 sind.

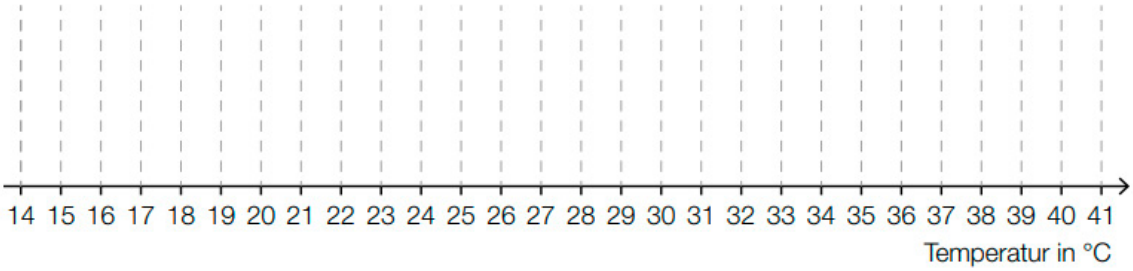
... von den 200 Messwerten ca. _____ Werte zwischen 6,9 und 7,7 liegen.

11. WS-R 1.2 ___/2P.

Bei einer meteorologischen Messstelle wurden die Tageshöchsttemperaturen für den Zeitraum von einem Monat in einem sehr heißen Sommer aufgezeichnet. Die Messwerte in Grad Celsius können dem nachstehenden Stängel-Blatt-Diagramm entnommen werden.

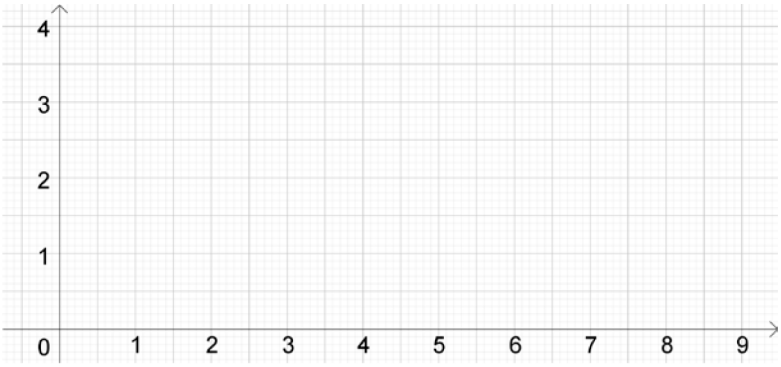
1	8
2	1 2 2 3 3
2	4 4 4 6 6 7 7 7 7 7 8
3	1 1 1 2 2 3 3 3 3 4 5 5 8
4	1

Stelle die aufgezeichneten Tageshöchsttemperaturen in einem Kastenschaubild (Boxplot) dar!



12. WS-R 1.2 ___/2P.

Eine Jugendgruppen-Leiterin erhebt, wie viele Stunden in der Woche ihre Gruppenmitglieder in der Freizeit Sport treiben. Sie erhält folgende Daten:
1; 3,5; 2; 4; 5; 7,5; 3; 0,5; 2,5; 9;
4,5; 2,5; 3; 7; 3,5; 2; 2,5; 6; 0,5; 4
Wähle die Klassen [0; 1];]1; 2,5];]2,5; 4] und]4; 9] und erstelle ein Histogramm!



5.2. Typ-2-artige-Aufgaben

Ausgleichsaufgaben mit ☺ gekennzeichnet!
Rechne mit exakten Werten und runde gegebenenfalls auf 2 Dez.!

1. Gegeben sind die Geraden g: $X = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ und h: $X = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

a) In welchem Punkt S schneiden g und h einander? ___**/2P.** ☺
b) Welchen Winkel schließen die Geraden g und h miteinander ein? ___/2P.
c) Ermittle die Gleichung der Ebene ε durch den Punkt $P = (4|4|-1)$, die normal zur Geraden g ist! ___/2P.
d) Ermittle eine Parameterdarstellung der Ebene, die von den Geraden g und h aufgespannt wird! ___/2P.

2. Die Punkte $A = (5|1|1)$, $B = (-1|3|9)$ und $C = (-3|-1|5)$ sind die Basiseckpunkte einer dreiseitigen geraden Pyramide mit dem Höhenfußpunkt $H = (x_H|0|3)$.
Die Spitze der Pyramide liegt in der Ebene E: $3x + 2y - z = -18$.

a) Zeige durch Berechnung, dass die Ebene der Grundfläche E_{ABC} durch $6x - 10y + 7z = 27$ angegeben werden kann. ___**/2P.** ☺
b) Berechne die fehlende Koordinate x_H des Höhenfußpunktes H. ___/2P.
c) Die Trägergerade der Höhe lautet h: $X = \begin{pmatrix} 7 \\ -10 \\ 10 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -10 \\ 7 \end{pmatrix}$.
Zeige durch Berechnung, dass die Koordinaten der Spitze der Pyramide $S = (13|-20|17)$ lauten. ___/2P.
d) Berechne den Abstand der Spitze S von der Ebene der Grundfläche E_{ABC}, indem du den Abstand des Punktes S von der Ebene E_{ABC} bestimmst. ___/2P.

3. Ein gleichschenkliges Dreieck mit Basislänge $\overline{AB} = 54$, welche auf der Geraden g: $X = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix}$ liegt, hat seine Spitze im Punkt $C = (8|-23|28)$.

a) Zeige durch Berechnung, dass die fehlenden Eckpunkte des Dreiecks die Koordinaten $A = (5|-5|13)$ und $B = (11|-29|61)$ haben. ___/4P.
b) Berechne den Umfang des Dreiecks ABC. ___/2P.
c) Berechne den Flächeninhalt des Dreiecks ABC. ___/2P.

Punkte Teil 1: _____ / 24P.

Ausgleichspunkte aus Teil 2: _____ / 4P.

Summe: _____
Für eine positive Note müssen in Teil 1 mindestens 16 Punkte (mit Berücksichtigung der Ausgleichspunkte) erreicht werden.

Punkte Teil 2 (ohne Ausgleichspunkte): _____/ 20P.

Gesamtpunktezahl: _____/48P.

Note: _____

Notenschlüssel:

48 – 42	Punkte	Sehr gut
41 – 34	Punkte	Gut
33 – 24	Punkte	Befriedigend
23 – 16	Punkte	Genügend
15 – 0	Punkte	Nicht genügend

5.3. Typ-1-artige-Aufgaben

1. AG-L 2.7 ___/2P.

Gegeben sind die drei Ebenen $\varepsilon_1: x - y = -1$, $\varepsilon_2: z = 2$ und $\varepsilon_3: 2x + y - 3z = -5$.
Kreuze ihren Schnittpunkt S an!

$S = (-1\|2\|-5)$	☐
$S = (-1\|0\|2)$	☐
$S = (2\|1\|-3)$	☐
$S = (0\|2\|-5)$	☐
$S = (0\|1\|2)$	☒
$S = (2\|3\|-3)$	☐

2. AG-R 3.4 ___/2P.

Bestimme die gegenseitige Lage der Geraden g und h und gegebenenfalls den Schnittpunkt!
g: $X = (2|0|3) + t \cdot (1|1|2)$ h: $X = (3|1|5) + u \cdot (-2|-1|4)$

g und h schneiden einander im Punkt $S = (3|1|5)$.

3. AG-R 3.4 ___/2P.

Berechne den Abstand des Punktes $P = (-4|3|-2)$ von der Geraden
g: $X = \begin{pmatrix} 7 \\ 11 \\ 9 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$!

$$d = |\vec{n}_0 \cdot \overrightarrow{AP}|$$
$$d = \left|\frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 7 \\ 11 \\ 9 \end{pmatrix}\right]\right|$$
$$d = \left|\frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -11 \\ -8 \\ -11 \end{pmatrix}\right|$$
$$d = \left|\frac{1}{3} \cdot 27\right|$$
$$d = 9$$

4. AG-R 3.4 ___/2P.

Gegeben ist eine Gerade g: $X = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ mit $s \in \mathbb{R}$.

Welche der folgenden Geraden sind parallel zu g?
Kreuze die beiden zutreffenden Antworten an!

$X = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$	☐
$X = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$	☐
$X = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} + v \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix}$	☒
$X = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} + w \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$	☐
$X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} + z \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$	☒

5. AG-L 3.8 ___/2P.

Berechne jenen Vektor $\vec{n}$, der auf $\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ normal steht!

$$\vec{n} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix}$$

6. AG-L 3.8 ___/2P.

Kreuze die beiden richtigen Aussagen an!
Sind $\vec{a}$ und $\vec{b}$ nicht parallele und von $\vec{o}$ verschiedene Vektoren aus $\mathbb{R}^3$, dann gilt:

$\vec{a} \times \vec{b} = 0 \Rightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$	☐
$\vec{a} \times \vec{b} \perp \vec{a}$ und $\vec{a} \times \vec{b} \perp \vec{b}$	☒
$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{b} \times \vec{a}$	☐
$\lvert\vec{a} \times \vec{b}\rvert$ = Flächeninhalt des von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Parallelogramms	☒
$\vec{a} \times \vec{b} \in \mathbb{R}$	☐

7. AG-L 3.9 ___/2P.

Gib die Ebene ε, von welcher der Punkt $A = (2|0|3)$ und die beiden Richtungsvektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$ gegeben sind, in Parameterdarstellung an!

$$X = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + v \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

8. AG-L 3.9 ___/2P.

Gib die Ebene, von der drei Punkte $A = (7|-1|3)$, $B = (2|4|-3)$ und $C = (0|-2|5)$ gegeben sind, in Normalvektordarstellung an!

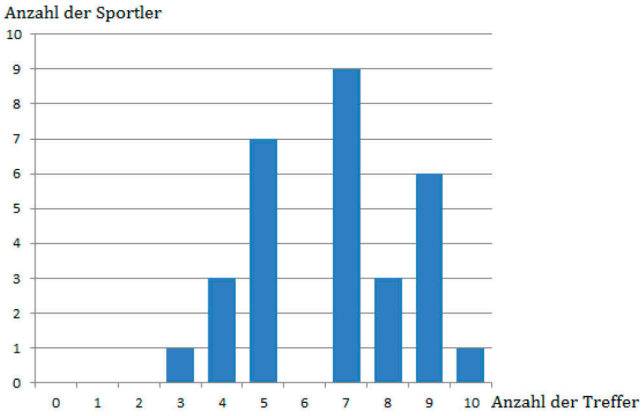
$$n = AB \times AC = \begin{pmatrix} -5 \\ 5 \\ -6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -7 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 52 \\ 40 \end{pmatrix} || \begin{pmatrix} 1 \\ 13 \\ 10 \end{pmatrix}$$

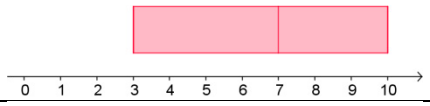
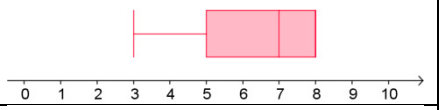
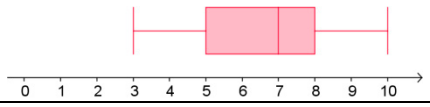
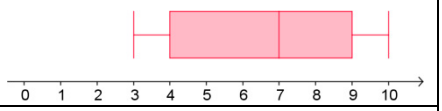
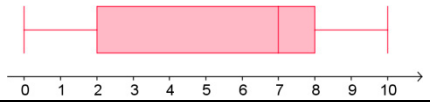
$$\varepsilon: \begin{pmatrix} 1 \\ 13 \\ 10 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 24$$

9. WS-R 1.1 ___/2P.

Ein Basketballtrainer möchte wissen, wie gut seine Basketballer Körbe werfen können. Er lässt jeden Sportler zehn Körbe werfen und notiert anschließend, wie viele Treffer erzielt wurden.

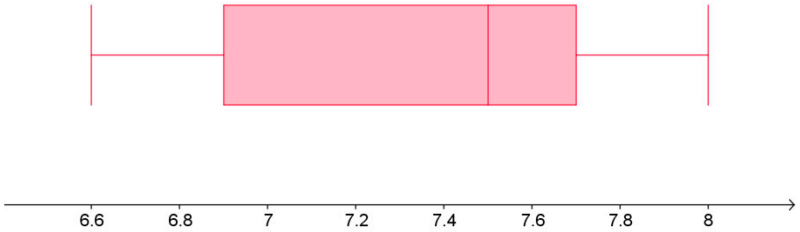
Kreuze das passende Kastenschaubild an!



A ☐		D ☐	
B ☒		E ☐	
C ☐			

10. WS-R 1.1 ___/2P.

Um den Benzinverbrauch seines Autos zu kontrollieren, schreibt Herr A stets auf, wie viel Liter sein Auto pro 100 km verbraucht. Diese Daten sind hier zusammengefasst in Form eines Diagramms dargestellt:



Setze in den folgenden Aussagen die richtigen Zahlen ein:
Aus dem Diagramm kann man entnehmen, dass ...

... ca. 50% der Werte kleiner als **7,5** Liter sind.

... jeder Verbrauch pro 100 km mindestens **6,6** Liter beträgt.

... von den 200 Messwerten ca. **50** Werte mindestens 7,7 sind.

... von den 200 Messwerten ca. **150** Werte größer als 6,9 sind.

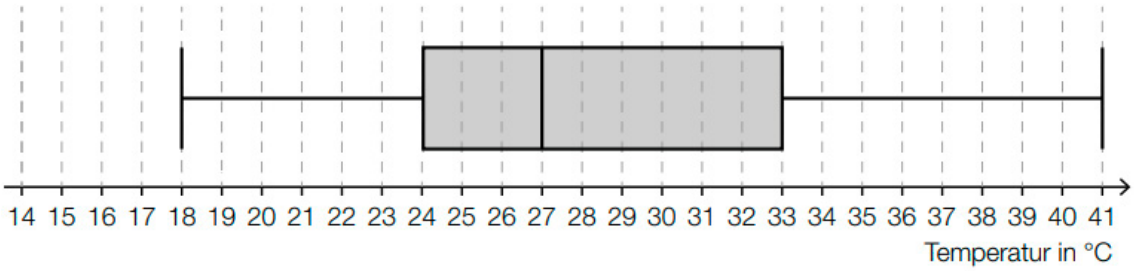
... von den 200 Messwerten ca. **100** Werte zwischen 6,9 und 7,7 liegen.

11. WS-R 1.2 ___/2P.

Bei einer meteorologischen Messstelle wurden die Tageshöchsttemperaturen für den Zeitraum von einem Monat in einem sehr heißen Sommer aufgezeichnet. Die Messwerte in Grad Celsius können dem nachstehenden Stängel-Blatt-Diagramm entnommen werden.

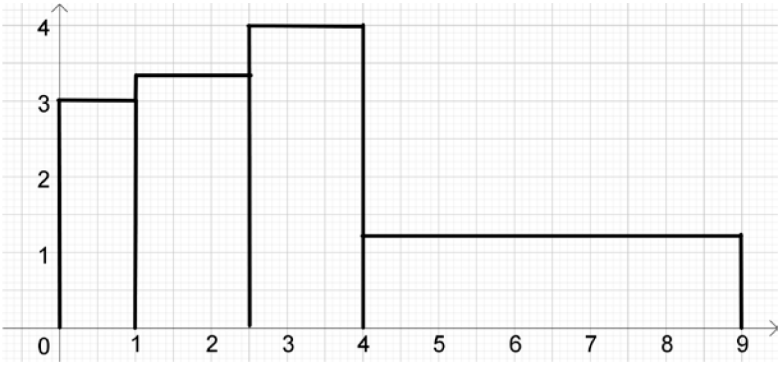
1	8
2	1 2 2 3 3
2	4 4 4 6 6 7 7 7 7 7 8
3	1 1 1 2 2 3 3 3 3 4 5 5 8
4	1

Stelle die aufgezeichneten Tageshöchsttemperaturen in einem Kastenschaubild (Boxplot) dar!



12. WS-R 1.2 ___/2P.

Eine Jugendgruppen-Leiterin erhebt, wie viele Stunden in der Woche ihre Gruppenmitglieder in der Freizeit Sport treiben. Sie erhält folgende Daten:
1; 3,5; 2; 4; 5; 7,5; 3; 0,5; 2,5; 9;
4,5; 2,5; 3; 7; 3,5; 2; 2,5; 6; 0,5; 4
Wähle die Klassen [0; 1];]1; 2,5];]2,5; 4] und]4; 9] und erstelle ein Histogramm!



5.4. Typ-2-artige-Aufgaben

Ausgleichsaufgaben mit ☺ gekennzeichnet!
Rechne mit exakten Werten und runde gegebenenfalls auf 2 Dez.!

1. Gegeben sind die Geraden g: $X = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ und h: $X = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

a) In welchem Punkt S schneiden g und h einander? ___/2P. ☺
b) Welchen Winkel schließen die Geraden g und h miteinander ein? ___/2P.
c) Ermittle die Gleichung der Ebene ε durch den Punkt $P = (4|4|-1)$, die normal zur Geraden g ist! ___/2P.
d) Ermittle eine Parameterdarstellung der Ebene, die von den Geraden g und h aufgespannt wird! ___/2P.

a)

$g \cap h$:

$$\begin{aligned} -3 - 2s &= 1 \qquad \Rightarrow s = -2 \\ 2 + 2s &= -3 - t \\ -1 - s &= 2 + t \end{aligned}$$

s in II:

$$\begin{aligned} 2 - 4 &= -3 - t \\ -2 &= -3 - t \qquad |+t| + 2 \\ t &= -1 \end{aligned}$$

S und t in III zur Probe:

$$-1 + 2 = 2 - 1 \quad \text{w.A.}$$

$$S = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} + (-1) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

S(1|-2|1)

b)

$$\alpha = 45°$$

c)

$$\varepsilon: \vec{g} \cdot X = \vec{g} \cdot P$$

$$\varepsilon: \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\varepsilon: -2x + 2y - z = 1 \qquad | \cdot (-1)$$

$$\varepsilon: 2x - 2y + z = -1$$

d)

$$X = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + v \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2. Die Punkte A $= (5|1|1)$, B $= (-1|3|9)$ und C $= (-3|-1|5)$ sind die Basiseckpunkte einer dreiseitigen geraden Pyramide mit dem Höhenfußpunkt H $= (x_H|0|3)$.
Die Spitze der Pyramide liegt in der Ebene E: $3x + 2y - z = -18$.

a) Zeige durch Berechnung, dass die Ebene der Grundfläche E_{ABC} durch $6x - 10y + 7z = 27$ angegeben werden kann. ___/2P. ☺

b) Berechne die fehlende Koordinate x_H des Höhenfußpunktes H. ___/2P.

c) Die Trägergerade der Höhe lautet h: $X = \begin{pmatrix} 7 \\ -10 \\ 10 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -10 \\ 7 \end{pmatrix}$.
Zeige durch Berechnung, dass die Koordinaten der Spitze der Pyramide S $= (13|-20|17)$ lauten. ___/2P.

d) Berechne den Abstand der Spitze S von der Ebene der Grundfläche E_{ABC}, indem du den Abstand des Punktes S von der Ebene E_{ABC} bestimmst. ___/2P.

a)

$$\vec{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -8 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 \\ -40 \\ 28 \end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix} 6 \\ -10 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$\varepsilon_{ABC}: \vec{n} \cdot X = \vec{n} \cdot A$

$\varepsilon_{ABC}: 6x - 10y + 7z = 27$

b)

$$6x_H - 10 \cdot 0 + 7 \cdot 3 = 27$$
$$6x_H = 6$$
$$x_H = 1$$

H(1|0|3)

c)

h: $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -10 \\ 7 \end{pmatrix}$

h $\cap\ \varepsilon$:

$$3 \cdot (1 + 6t) + 2 \cdot (-10t) - (3 + 7t) = 18$$
$$3 + 18t - 20t - 3 - 7t = -18$$
$$-9t = -18$$
$$t = 2$$

S(13|-20|17)

d)

$$h = |\overrightarrow{HS}| = \left| \begin{pmatrix} 12 \\ -20 \\ 14 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{740} \approx 27{,}20$$

3. Ein gleichschenkliges Dreieck mit Basislänge $\overline{AB} = 54$, welche auf der Geraden g: $X = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix}$ liegt, hat seine Spitze im Punkt $C = (8|-23|28)$.

a) Zeige durch Berechnung, dass die fehlenden Eckpunkte des Dreiecks die Koordinaten $A = (5|-5|13)$ und $B = (11|-29|61)$ haben. ___/4P.

b) Berechne den Umfang des Dreiecks ABC. ___/2P.

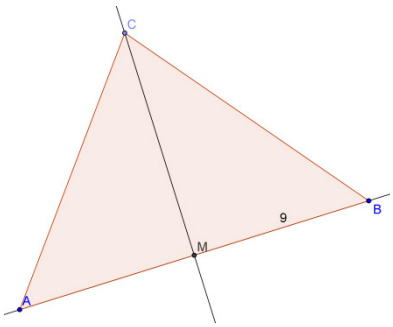
c) Berechne den Flächeninhalt des Dreiecks ABC. ___/2P.

a) Ebene normal auf g durch C:

$$\varepsilon: \vec{n} \cdot X = \vec{n} \cdot C$$

$$\varepsilon: \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 \\ -23 \\ 28 \end{pmatrix}$$

$$\varepsilon: x - 4y + 8z = 324$$



$\varepsilon \cap g$:

$$(4 + s) - 4 \cdot (-1 - 4s) + 8 \cdot (5 + 8s) = 324$$

$$4 + s + 4 + 16s + 40 + 64s = 324$$

$$48 + 81s = 324$$

$$81s = 324$$

$$s = 4$$

$$M = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} + 4 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -17 \\ 37 \end{pmatrix}$$

$$A, B = M \pm 27 \cdot \overrightarrow{g_0} = \begin{pmatrix} 8 \\ -17 \\ 37 \end{pmatrix} \pm \frac{27}{9} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -17 \\ 37 \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} 3 \\ -12 \\ 24 \end{pmatrix}$$

$A = (5|-5|13)$

$B = (11|-29|61)$

$C = (8|-23|28)$

b) Umfang des gleichschenkligen Dreiecks:

$$u = 2 \cdot a + c$$

$$u = 2 \cdot |\overrightarrow{BC}| + |\overrightarrow{AB}|$$

$$u = 2 \cdot \left| \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ -33 \end{pmatrix} \right| + 54$$

$$u = 18 \cdot \sqrt{14} + 54$$

$$u \approx 121{,}35$$

c) Flächeninhalt:

$$A = \frac{1}{2} \cdot |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \frac{1}{2} \cdot \left| \begin{pmatrix} 6 \\ -24 \\ 48 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ -18 \\ 15 \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{2} \cdot \left| \begin{pmatrix} 504 \\ 54 \\ -36 \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{2} \cdot 18\sqrt{797} \approx 254{,}08$$

6. PROBESCHULARBEIT

Datum:	Sommersemester (4. Semester NOST)
Stoffgebiet:	Beschreibende Statistik, Wahrscheinlichkeit
Zeit:	50 min Teil 1, 50 min Teil 2
Grundkompetenzen:	
WS-R 1.3	**Statistische Kennzahlen** (absolute Häufigkeit, relative Häufigkeit, arithmetisches Mittel, Median, Modus, Quartile, Spannweite, empirische Varianz/Standard-abweichung) im jeweiligen Kontext interpretieren können; die angeführten Kennzahlen für einfache Datensätze ermitteln können
WS-R 1.4	Definition und wichtige Eigenschaften des arithmetischen Mittels und des Medians angeben und nutzen, Quartile ermitteln und interpretieren können; die Entscheidung für die Verwendung einer bestimmten Kennzahl begründen können
WS-R 2.1	Grundraum und Ereignisse in angemessenen Situationen verbal bzw. formal angeben können
WS-R 2.2	Relative Häufigkeit als Schätzwert von Wahrscheinlichkeit verwenden und anwenden können
WS-R 2.3	**Wahrscheinlichkeit** unter der Verwendung der Laplace-Annahme (Laplace-Wahrscheinlichkeit) berechnen und interpretieren können, Additionsregel und Multiplikationsregel anwenden und interpretieren können
WS-L 2.5	**Bedingte Wahrscheinlichkeiten** kennen, berechnen und interpretieren können
WS-L 2.6	Entscheiden können, ob ein Ereignis von einem anderen Ereignis abhängt oder von diesem unabhängig ist

6.1. Typ-1-artige-Aufgaben

1. WS-R 1.3 ___/2P.

Ein Optiker beschäftigt vier Lehrlinge und drei Gesellen. Die Höhe des Lohnes hängt von der Anzahl der Ausbildungsjahre ab. Im Mittel verdienen die Lehrlinge 595 € und die Gesellen 1 230 €. Berechne den Durchschnittslohn aller Lehrlinge und Gesellen des Betriebs!

2. WS-R 1.3 ___/2P.

In der Tabelle sind die Anzahl der ausgezeichneten Erfolge der Unterstufenklassen eines Gymnasiums angegeben. Ordne die Zentralmaße bzw. Quartile richtig zu!

1a	1b	1c	1d	2a	2b	2c	2d	3a	3b	3c	3d	4a	4b	4c
2	4	7	2	4	2	11	2	2	3	5	2	3	6	5

Median	
Modus	
Arithmetisches Mittel	
75% - Quartil	

A	2
B	3
C	4
D	5
E	6
F	7

3. WS-R 1.4 ___/2P.

Gegeben ist die folgende Datenliste: 3, 4, 6, 6, 8, 10, 15, 16

Ändere zwei Werte der Liste so ab, dass das arithmetische Mittel gleich bleibt und der Median größer wird.

4. WS-R 1.4 ___/2P.

Bei der Berechnung des arithmetischen Mittelwerts zweier vorgegebener Listen erhält man jeweils den Wert 8. Die erste Liste besitzt die Standardabweichung 1, die zweite Liste die Standardabweichung 2. Welche der folgenden Aussagen sind richtig? Kreuze an!

Beide Listen haben auch den gleichen Median.	☐
Die zweite Liste ist breiter gestreut als die erste.	☐
In der zweiten Liste sind doppelt so viele Elemente wie in der ersten.	☐
Bei der ersten Liste liegt der Großteil der Daten im Intervall [7;9].	☐
Bei der zweiten Liste liegt keine Zahl außerhalb des Intervalls [6;10].	☐

5. WS-R 2.1 ___/2P.

In einem Behälter befinden sich 16 gelb Kugeln und 9 rot Kugeln. Die Kugeln sind bis auf ihre Farbe nicht unterscheidbar. Es sollen nun in einem Zufallsexperiment zwei Kugeln nacheinander gezogen werden, wobei die erste Kugel nach dem Ziehen nicht zurückgelegt wird und es auf die Reihenfolge der Ziehung ankommt.

Die Buchstaben r und b haben folgende Bedeutung:
g ... das Ziehen einer gelben Kugel
r ... das Ziehen einer roten Kugel
Ergänze die Textlücken im folgenden Satz durch Ankreuzen der jeweils richtigen Satzteile so, dass eine korrekte Aussage entsteht!

Ein Grundraum G für dieses Zufallsexperiment lautet _____①_____, und _____②_____ ist ein Ereignis.

①		②	
$G = \{g, r\}$	☐	die Wahrscheinlichkeit, dass denau eine rote Kugel gezogen wird,	☐
$G = \{(g, g), (g, r), (r, r)\}$	☐	jede Teilmenge des Grundraumes	☐
$G = \{(g, g), (g, r), (r, g), (r, r)\}$	☐	b	☐

6. WS-R 2.1 ___/2P.

In einem Behälter befinden sich zwei Kugeln, die mit den Buchstaben A bzw. B beschriftet sind. Die Kugeln sind – abgesehen von ihrer Beschriftung – nicht unterscheidbar. Aus diesem Behälter wird dreimal zufällig eine Kugel gezogen, wobei diese nach jedem Zug wieder in den Behälter zurückgelegt wird.

Gib den Grundraum dieses Zufallsversuchs vollständig durch Zahlentripel (x, y, z) an!
x, y und z nehmen dabei jeweils die Werte A oder B an.

$\Omega =$ _____

7. WS-R 2.2 ___/2P.

Lieselotte spielt über einen längeren Zeitraum regelmäßig dasselbe Online-Glücksspiel mit konstanter Gewinnwahrscheinlichkeit. Von 465 Spielen gewinnt sie 132.
Mit welcher ungefähren Wahrscheinlichkeit wird sie das nächste Spiel gewinnen?

Kreuze den zutreffenden Schätzwert für diese Wahrscheinlichkeit an!

13,2 %	☐
0,132 %	☐
46,5 %	☐
3,5 %	☐
28,4 %	☐
33,3 %	☐

8. WS-R 2.2
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, beim Roulette zu gewinnen,
wenn auf die Gruppe $\{2,3,5,6\}$ gesetzt wird? ___/1P.

$P(\text{Gruppe } \{2,3,5,6\}) =$ _____

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, beim Roulette zu gewinnen,
wenn auf IMPAIR (ungerade Zahlen) gesetzt wird? ___/1P.

$P(\text{Impair}) =$ _____

9. WS-R 2.3 ___/2P.
Eine Lehrerin wählt am Beginn der Unterrichtsstunde nach dem Zufallsprinzip 3 Kinder aus, die eine Stundenwiederholung machen müssen. Es sind 14 Burschen und 9 Mädchen anwesend. Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass zur Stundenwiederholung 1 Bursch und 2 Mädchen ausgewählt werden!

$P(1 \text{ Bursch}, 2 \text{ Mädchen}) =$ _____

10. WS-R 2.3 ___/2P.
Ein idealer sechsseitiger Würfel mit den Augenzahlen 1 bis 6 wird einmal geworfen.
Ordne den Fragestellungen in der linken Spalte die passenden Wahrscheinlichkeiten in der rechten Spalte zu!

Fragestellung	
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine Zahl größer als 5 gewürfelt wird?	
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine Zahl kleiner als 3 gewürfelt wird?	
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine ungerade Zahl gewürfelt wird?	
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine Zahl größer als 6 gewürfelt wird?	

Wahrscheinlichkeit	
A	1
B	$\frac{1}{2}$
C	$\frac{1}{3}$
D	$\frac{1}{4}$
E	$\frac{1}{6}$
F	0

11. WS-L 2.5 ___/2P.
Gegeben sind die Ereignisse A und B.
Kreuze die zutreffende(n) Aussage(n) an!

$P(A\|A) = 1$	☐
$P(A\|B) = P(B\|A)$	☐
$P(A \cap B) = P(A\|B) \cdot P(A)$	☐
$P(A\|A') = 1$	☐
$P(A \cap B) = P(B\|A) \cdot P(A)$	☐

12. WS-L 2.6 ___/2P.

Ein Würfel wird geworfen. Man erhält die Augenzahl X.

Zeige, dass das Ereignis E_1: X ist gerade vom Ereignis E_2: $X \leq 2$ unabhängig ist.

6.1. Typ-2-artige-Aufgaben

Ausgleichsaufgaben mit ☺ gekennzeichnet!
Rechne mit exakten Werten und runde gegebenenfalls auf 2 Dez.!

1. Eine Firma befüllt Honiggläser mit einer Sollmasse von 500 g. Zur Qualitätssicherung wurden bei 20 zufällig ausgewählten Gläsern die folgenden Füllmengen (in Gramm) festgestellt:
503, 498, 499, 509, 503, 500, 510, 495, 503, 498,
509, 503, 509, 504, 504, 497, 515, 481, 495, 500

a) Erstelle ein Stängel-Blatt-Diagramm für die gegebenen Füllmengen in der Stichprobe und gib Median und Modus an! **___/2P. ☺**

b) Berechne Mittelwert und Standardabweichung der Füllmengen in der Stichprobe! ___/2P.

c) Um wie viel Prozent weicht die mittlere Füllmenge von der Sollmasse ab? ___/2P.

d) Wie ist die Qualität der Abfüllung insgesamt zu beurteilen? ___/2P.

2. Eine Heilmittelfirma testet die Medikamente A, B, C an 2000 Versuchstieren mit folgendem Ergebnis: A wird bei 500 Tieren verwendet und ergibt 200 positive Reaktionen; B wird bei 500 Tieren verwendet und ergibt 250 positive Reaktionen; C wird bei 1000 Tieren verwendet und ergibt 300 positive Reaktionen.

a) Es werden 4 Tiere mit dem Medikament A behandelt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass keines der Tiere eine positive Reaktion zeigt, und wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens eines eine positive Reaktion zeigt? ___/2P.

b) Einem Tier werden die Medikamente A und C verabreicht.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass dieses Tier eine positive Reaktion zeigt, wenn man voraussetzt, dass die beiden Medikamente einander in ihrer Wirkung nicht beeinflussen? ___/2P.

c) Eines der 2000 Versuchstiere wird zufällig ausgewählt.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass bei ihm eine positive Reaktion eingetreten ist? ___/2P.

d) Eines der 2000 Versuchstiere wird zufällig ausgewählt und es zeigt eine positive Reaktion.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass es mit dem Medikament A behandelt wurde? ___/2P.

3. Die untenstehende Vierfeldertafel zeigt die Ergebnisse einer medizinischen Zöliakie-Studie. Um den Effekt einer Therapie auf die Entwicklung einer zusätzlichen Laktoseunverträglichkeit während eines Beobachtungszeitraums von 5 Jahren zu untersuchen, wurde eine Interventionsgruppe, die mit der Therapie behandelt worden war, mit einer Kontrollgruppe verglichen, die die gewöhnliche Therapie (glutenfreie Ernährung) erhalten hatte.

a) Vervollständige die Randsummen der Vierfeldertafel! ____/2P.

b) Wie viele Personen wurden insgesamt in die Studie einbezogen, wie viele Personen umfasste die Kontrollgruppe und wie viele Personen entwickelten im Lauf des Beobachtungszeitraums eine Laktoseunverträglichkeit? ___/2P.

c) Kann man auf Grund der Daten einen statistischen Zusammenhang zwischen Therapie und Vermeidung einer Laktoseunverträglichkeit vermuten? Argumentiere! ___/2P.

		Laktoseunverträglichkeit		
		ja	nein	Summe
Gruppe	Intervention	32	249	
	Kontrolle	63	258	
	Summe			

4. Freerunning & Parkour

Parkour ist eine Fortbewegungsart, mit der man versucht, so schnell und effizient wie möglich, von A nach B zu kommen. Dabei überwindet man, fast immer, diverse Hindernisse. Freerunning ist, wie Parkour, eine Fortbewegungsart, wobei man nicht zwingend den kürzesten Weg wählt. Hier, im Unterschied zu Parkour, werden viele akrobatische Elemente eingebaut, während man Hindernisse überwindet.

Für die Überwindung eines bestimmten Hindernisses muss der Freerunner aus dem Stand 55 cm in die Höhe springen. Ein Athlet unternimmt 6 Versuche und erzielt folgende Höhen:

Sprung	1	2	3	4	5	6
Höhe	42 cm	45 cm	56 cm	54 cm	57 cm	54 cm

Berechne das arithmetische Mittel und den Median dieser Sprunghöhen.

Ergänze drei weitere Sprunghöhen so, dass sich die Standardabweichung verringert, während das arithmetische Mittel gleichbleibt. **___/2P.** ☺

Punkte Teil 1: _____ / 24P.

Ausgleichspunkte aus Teil 2: _____ / 4P.

Summe: _____

Für eine positive Note müssen in Teil 1 mindestens 16 Punkte (mit Berücksichtigung der Ausgleichspunkte) erreicht werden.

Punkte Teil 2 (ohne Ausgleichspunkte): _____/ 20P.

Gesamtpunktezahl: _____/48P.

Note: _____

Notenschlüssel:

48 – 42	Punkte	Sehr gut
41 – 34	Punkte	Gut
33 – 24	Punkte	Befriedigend
23 – 16	Punkte	Genügend
15 – 0	Punkte	Nicht genügend

6.2. Typ-1-artige-Aufgaben

1. WS-R 1.3 ___/2P.

Ein Optiker beschäftigt vier Lehrlinge und drei Gesellen. Die Höhe des Lohnes hängt von der Anzahl der Ausbildungsjahre ab. Im Mittel verdienen die Lehrlinge 595 € und die Gesellen 1 230 €. Berechne den Durchschnittslohn aller Lehrlinge und Gesellen des Betriebs!

$$\frac{4 \cdot 595 + 3 \cdot 1230}{7} \approx 867{,}14\ €$$

2. WS-R 1.3 ___/2P.

In der Tabelle sind die Anzahl der ausgezeichneten Erfolge der Unterstufenklassen eines Gymnasiums angegeben. Ordne die Zentralmaße bzw. Quartile richtig zu!

1a	1b	1c	1d	2a	2b	2c	2d	3a	3b	3c	3d	4a	4b	4c
2	4	7	2	4	2	11	2	2	3	5	2	3	6	5

Median	**B**
Modus	**A**
Arithmetisches Mittel	**C**
75% - Quartil	**D**

A	2
B	3
C	4
D	5
E	6
F	7

3. WS-R 1.4 ___/2P.

Gegeben ist die folgende Datenliste: 3, 4, 6, 6, 8, 10, 15, 16
Ändere zwei Werte der Liste so ab, dass das arithmetische Mittel gleich bleibt und der Median größer wird.

Mittelwert $= \frac{3+4+6+6+8+10+15+16}{8} = \frac{68}{8} = 8{,}5$

Median $= 7$

Mögliche Änderung: 3, 4, 6, **8**, 8, **8**, 15, 16

Mittelwert $= \frac{3+4+6+8+8+8+15+16}{8} = \frac{68}{8} = 8{,}5$

Median $= 8$

4. WS-R 1.4 ___/2P.

Bei der Berechnung des arithmetischen Mittelwerts zweier vorgegebener Listen erhält man jeweils den Wert 8. Die erste Liste besitzt die Standardabweichung 1, die zweite Liste die Standardabweichung 2. Welche der folgenden Aussagen sind richtig? Kreuze an!

Beide Listen haben auch den gleichen Median.	☐
Die zweite Liste ist breiter gestreut als die erste.	☒
In der zweiten Liste sind doppelt so viele Elemente wie in der ersten.	☐
Bei der ersten Liste liegt der Großteil der Daten im Intervall [7;9].	☒
Bei der zweiten Liste liegt keine Zahl außerhalb des Intervalls [6;10].	☐

5. WS-R 2.1 ___/2P.

In einem Behälter befinden sich 16 gelb Kugeln und 9 rot Kugeln. Die Kugeln sind bis auf ihre Farbe nicht unterscheidbar. Es sollen nun in einem Zufallsexperiment zwei Kugeln nacheinander gezogen werden, wobei die erste Kugel nach dem Ziehen nicht zurückgelegt wird und es auf die Reihenfolge der Ziehung ankommt.

Die Buchstaben r und b haben folgende Bedeutung:
g ... das Ziehen einer gelben Kugel
r ... das Ziehen einer roten Kugel
Ergänze die Textlücken im folgenden Satz durch Ankreuzen der jeweils richtigen Satzteile so, dass eine korrekte Aussage entsteht!

Ein Grundraum G für dieses Zufallsexperiment lautet _____①_____, und _____②_____ ist ein Ereignis.

①		②	
$G = \{g, r\}$	☐	die Wahrscheinlichkeit, dass denau eine rote Kugel gezogen wird,	☐
$G = \{(g,g),(g,r),(r,r)\}$	☐	jede Teilmenge des Grundraumes	☒
$G = \{(g,g),(g,r),(r,g),(r,r)\}$	☒	r	☐

6. WS-R 2.1 ___/2P.

In einem Behälter befinden sich zwei Kugeln, die mit den Buchstaben A bzw. B beschriftet sind. Die Kugeln sind – abgesehen von ihrer Beschriftung – nicht unterscheidbar. Aus diesem Behälter wird dreimal zufällig eine Kugel gezogen, wobei diese nach jedem Zug wieder in den Behälter zurückgelegt wird.

Gib den Grundraum dieses Zufallsversuchs vollständig durch Zahlentripel (x, y, z) an!
x, y und z nehmen dabei jeweils die Werte A oder B an.

$\Omega = \{(A,A,A),(A,A,B),(A,B,A),(B,A,A),(B,B,A),(B,A,B),(A,B,B),(B,B,B)\}$

7. WS-R 2.2 ___/2P.

Lieselotte spielt über einen längeren Zeitraum regelmäßig dasselbe Online-Glücksspiel mit konstanter Gewinnwahrscheinlichkeit. Von 465 Spielen gewinnt sie 132.
Mit welcher ungefähren Wahrscheinlichkeit wird sie das nächste Spiel gewinnen?

Kreuze den zutreffenden Schätzwert für diese Wahrscheinlichkeit an!

13,2 %	☐
0,132 %	☐
46,5 %	☐
3,5 %	☐
28,4 %	☒
33,3 %	☐

8. WS-R 2.2
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, beim Roulette zu gewinnen,
wenn auf die Gruppe {2,3,5,6} gesetzt wird? ___/1P.

$$P(\text{Gruppe } \{2,3,5,6\}) = \frac{4}{37}$$

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, beim Roulette zu gewinnen,
wenn auf IMPAIR (ungerade Zahlen) gesetzt wird? ___/1P.

$$P(\text{Impair }) = \frac{18}{37}$$

9. WS-R 2.3 ___/2P.
Eine Lehrerin wählt am Beginn der Unterrichtsstunde nach dem Zufallsprinzip 3 Kinder aus, die eine Stundenwiederholung machen müssen. Es sind 14 Burschen und 9 Mädchen anwesend. Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass zur Stundenwiederholung 1 Bursch und 2 Mädchen ausgewählt werden!

$$P(1 \text{ Bursch}, 2 \text{ Mädchen}) = \frac{14}{23} \cdot \frac{9}{22} \cdot \frac{8}{21} = \frac{24}{253} \approx 0{,}0949 = 9{,}49\ \%$$

10. WS-R 2.3 ___/2P.
Ein idealer sechsseitiger Würfel mit den Augenzahlen 1 bis 6 wird einmal geworfen.
Ordne den Fragestellungen in der linken Spalte die passenden Wahrscheinlichkeiten in der rechten Spalte zu!

Fragestellung	
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine Zahl größer als 5 gewürfelt wird?	E
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine Zahl kleiner als 3 gewürfelt wird?	C
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine ungerade Zahl gewürfelt wird?	B
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine Zahl größer als 6 gewürfelt wird?	F

Wahrscheinlichkeit	
A	1
B	$\frac{1}{2}$
C	$\frac{1}{3}$
D	$\frac{1}{4}$
E	$\frac{1}{6}$
F	0

11. WS-L 2.5 ___/2P.
Gegeben sind die Ereignisse A und B.
Kreuze die zutreffende(n) Aussage(n) an!

$P(A\|A) = 1$	☒
$P(A\|B) = P(B\|A)$	☐
$P(A \cap B) = P(A\|B) \cdot P(A)$	☐
$P(A\|A') = 1$	☐
$P(A \cap B) = P(B\|A) \cdot P(A)$	☒

12. WS-L 2.6 ___/2P.

Ein Würfel wird geworfen. Man erhält die Augenzahl X.
Zeige, dass das Ereignis E_1: X ist gerade vom Ereignis E_2: X $\leq$ 2 unabhängig ist.

Zu zeigen: $P(E_1|E_2) = P(E_1)$

$E_1 = \{2,4,6\}$, $E_2 = \{1,2\}$

$P(E_1|E_2) = \frac{1}{2}$

$P(E_1) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

6.3. Typ-2-artige-Aufgaben

Ausgleichsaufgaben mit ☺ gekennzeichnet!
Rechne mit exakten Werten und runde gegebenenfalls auf 2 Dez.!

1. Eine Firma befüllt Honiggläser mit einer Sollmasse von 500 g. Zur Qualitätssicherung wurden bei 20 zufällig ausgewählten Gläsern die folgenden Füllmengen (in Gramm) festgestellt:
503, 498, 499, 509, 503, 500, 510, 495, 503, 498,
509, 503, 509, 504, 504, 497, 515, 481, 495, 500

a) Erstelle ein Stängel-Blatt-Diagramm für die gegebenen Füllmengen in der Stichprobe und gib Median und Modus an! ___/2P. ☺

b) Berechne Mittelwert und Standardabweichung der Füllmengen in der Stichprobe! ___/2P.

c) Um wie viel Prozent weicht die mittlere Füllmenge von der Sollmasse ab? ___/2P.

d) Wie ist die Qualität der Abfüllung insgesamt zu beurteilen? ___/2P.

a) Stängel-Blatt-Diagramm:

HZ	E
48	1
49	5 5 7 8 8 9
50	0 0 3 3 3 3 4 4 9 9 9
51	0 5

Median: 503
Modus: 503

b) Mittelwert: $\bar{x} = \frac{503+498+499+509+503+500+\cdots+495+500}{20} = \frac{10035}{20} = 501{,}75$ g

Standardabweichung: $s = \sqrt{\frac{(481-500{,}5)^2+2\cdot(495-500{,}5)^2+\cdots+(515-500{,}5)^2}{20}} \approx 7{,}19$ g

c) $A = G \cdot \frac{p}{100}$

$p = \frac{A \cdot 100}{G} = \frac{1{,}75 \cdot 100}{500} \approx 0{,}35\ \%$

Die mittlere Füllmenge weicht vom Sollwert um 0,35 % ab.

d) Die Abfüllanlagen sind mit einer Abweichung von ca. 0,35 % vom Sollwert richtig justiert. Geht man davon aus, dass der „Großteil" der Daten im Intervall $[500 - s; 500 + s]$ liegt, dann kann man vermuten: Der „Großteil" der Füllmengen weicht um höchstens $p = \frac{A\cdot 100}{G} = \frac{7{,}19\cdot 100}{500} \approx 1{,}44\ \%$ von der Sollmasse ab. Das kann als akzeptabler Produktionsfehler gelten.

2. Eine Heilmittelfirma testet die Medikamente A, B, C an 2000 Versuchstieren mit folgendem Ergebnis: A wird bei 500 Tieren verwendet und ergibt 200 positive Reaktionen; B wird bei 500 Tieren verwendet und ergibt 250 positive Reaktionen; C wird bei 1000 Tieren verwendet und ergibt 300 positive Reaktionen.

a) Es werden 4 Tiere mit dem Medikament A behandelt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass keines der Tiere eine positive Reaktion zeigt, und wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens eines eine positive Reaktion zeigt? ___/2P.

b) Einem Tier werden die Medikamente A und C verabreicht.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass dieses Tier eine positive Reaktion zeigt, wenn man voraussetzt, dass die beiden Medikamente einander in ihrer Wirkung nicht beeinflussen? ___/2P.

c) Eines der 2000 Versuchstiere wird zufällig ausgewählt.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass bei ihm eine positive Reaktion eingetreten ist? ___/2P.

d) Eines der 2000 Versuchstiere wird zufällig ausgewählt und es zeigt eine positive Reaktion.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass es mit dem Medikament A behandelt wurde? ___/2P.

positive Reaktion auf A: $\frac{200}{500}$, positive Reaktion auf B: $\frac{250}{500}$, positive Reaktion auf C: $\frac{300}{1000}$

a) $P(\text{kein Tier zeigt positive Reaktion auf A}) = \left(\frac{300}{500}\right)^4 = 0{,}1296$

$P(\text{mindestens ein Tier zeigt eine positive Reaktion}) =$

$= 1 - P(\text{kein Tier zeigt positive Reaktion}) = 1 - 0{,}1296 = 0{,}8704$

b) $P(\text{positive Reaktion auf A oder C}) =$

$= 1 - P(\text{keine positive Reaktion auf A oder C}) =$

$= 1 - \frac{300}{500} \cdot \frac{700}{1000} = 1 - 0{,}42 = 0{,}58$

c) $P(\text{pos. Reaktion}) =$

$= P(\text{pos. Reaktion auf A}) + P(\text{pos. Reaktion auf B}) + P(\text{pos. Reaktion auf C}) =$

$= \frac{500}{2000} \cdot \frac{200}{500} + \frac{500}{2000} \cdot \frac{250}{500} + \frac{1000}{2000} \cdot \frac{300}{1000} =$

$= 0{,}1 + 0{,}125 + 0{,}15 = 0{,}375$

d) $P(\text{A}|\text{pos. Reaktion}) = \frac{P(\text{pos. Reaktion}|\text{A}) \cdot P(\text{A})}{P(\text{pos. Reaktion})} = \frac{\frac{200}{500} \cdot \frac{500}{2000}}{0{,}375} = 0{,}2\overline{6}$

3. Die untenstehende Vierfeldertafel zeigt die Ergebnisse einer medizinischen Zöliakie-Studie. Um den Effekt einer Therapie auf die Entwicklung einer zusätzlichen Laktoseunverträglichkeit während eines Beobachtungszeitraums von 5 Jahren zu untersuchen, wurde eine Interventionsgruppe, die mit der Therapie behandelt worden war, mit einer Kontrollgruppe verglichen, die die gewöhnliche Therapie (glutenfreie Ernährung) erhalten hatte.

a) Vervollständige die Randsummen der Vierfeldertafel! ____/2P.

b) Wie viele Personen wurden insgesamt in die Studie einbezogen, wie viele Personen umfasste die Kontrollgruppe und wie viele Personen entwickelten im Lauf des Beobachtungszeitraums eine Laktoseunverträglichkeit? ___/2P.

c) Kann man auf Grund der Daten einen statistischen Zusammenhang zwischen Therapie und Vermeidung einer Laktoseunverträglichkeit vermuten? Argumentiere! ___/2P.

		Laktoseunverträglichkeit		
		ja	nein	Summe
Gruppe	Intervention	32	249	
	Kontrolle	63	258	
	Summe			

a)

		Laktoseunverträglichkeit		
		ja	nein	Summe
Gruppe	Intervention	32	249	281
	Kontrolle	63	258	321
	Summe	95	507	602

b) In die Studie wurden insgesamt 602 Personen einbezogen.
Die Kontrollgruppe umfasste 321 Personen.
95 Personen entwickelten im Laufe des Beobachtungszeitraums eine Laktoseunverträglichkeit.

c) Unter allen in der Studie einbezogenen Personen entwickeln $\frac{507}{602} \approx 84{,}22\ \%$ im Beobachtungszeitraum keine Laktoseintoleranz, in der Interventionsgruppe aber sind es $\frac{249}{281} \approx 88{,}61\ \%$. Man kann also vermuten, dass zwischen Therapie und Vermeidung einer Laktoseunverträglichkeit ein positiver statistischer Zusammenhang besteht.

4. Freerunning & Parkour

Parkour ist eine Fortbewegungsart, mit der man versucht, so schnell und effizient wie möglich, von A nach B zu kommen. Dabei überwindet man, fast immer, diverse Hindernisse. Freerunning ist, wie Parkour, eine Fortbewegungsart, wobei man nicht zwingend den kürzesten Weg wählt. Hier, im Unterschied zu Parkour, werden viele akrobatische Elemente eingebaut, während man Hindernisse überwindet.

Für die Überwindung eines bestimmten Hindernisses muss der Freerunner aus dem Stand 55 cm in die Höhe springen. Ein Athlet unternimmt 6 Versuche und erzielt folgende Höhen:

Sprung	1	2	3	4	5	6
Höhe	42 cm	45 cm	56 cm	54 cm	57 cm	54 cm

Berechne das arithmetische Mittel und den Median dieser Sprunghöhen.
Ergänze drei weitere Sprunghöhen so, dass sich die Standardabweichung verringert, während das arithmetische Mittel gleichbleibt. ___/**2P.** ☺

Arithmetisches Mittel: $\bar{x} = \frac{42+45+56+54+57+54}{6} = \frac{308}{6} = 51,\overline{3}$

Median: 54

Zwei weitere Sprunghöhen: z.B. $x_7 = 50$, $x_8 = 52$, $x_9 = 52$