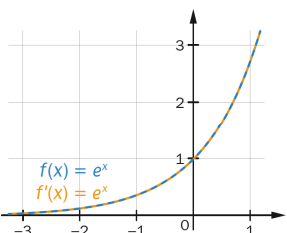


Beweisskizze für die Ableitungsregel für die natürliche Exponentialfunktion

Ableitung der natürlichen Exponentialfunktion $f(x) = e^x$ $f'(x) = e^x$ (eulersche Zahl $e = 2,71828\dots$)		Die natürliche Exponentialfunktion ist die einzige Funktion, deren Funktionswerte an jeder Stelle gleich der Steigung sind. Diese bemerkenswerte Eigenschaft ist ein Grund, warum für Exponentialfunktionen oft die Basis e verwendet wird. Beweisskizze: E-Book
--	---	--

Für den Beweis verwendet man die Definition des Differentialquotienten:

DEFINITION.

Ist f eine reelle Funktion, dann heißt der Grenzwert $f'(x) := \lim_{z \rightarrow x} \frac{f(z) - f(x)}{z - x}$ **Änderungsrate** oder **Differentialquotient** von f an der Stelle x .

Beweisskizze

Mit $f(x) = e^x$ gilt: $f'(x) = \lim_{z \rightarrow x} \frac{e^z - e^x}{z - x}$

Es ist in diesem Fall günstig für die Differenz $z - x$ die Abkürzung Δx zu verwenden.

Mit $\Delta x = z - x$ gilt:

- Wenn sich z an x annähert ($z \rightarrow x$) nähert sich die Differenz Δx der Zahl null ($\Delta x \rightarrow 0$).
- $z = x + \Delta x$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{e^{x+\Delta x} - e^x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{e^x \cdot e^{\Delta x} - e^x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(e^x \cdot \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} \right) = e^x \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x}$$

Mithilfe der Definition der eulerschen Zahl e kann man nachweisen, dass $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = 1$ ist.

Wir begnügen uns hier damit, diesen Zusammenhang anhand einer Wertetabelle plausibel zu machen:

Δx	$\frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x}$ (gerundet auf 10 Stellen)
1	1,7182818285
0,1	1,0517091808
0,01	1,0050167084
0,001	1,0005001667
0,0001	1,0000500017
0,00001	1,0000050000
0,000001	1,0000005000
0,0000001	1,0000000494
...	...

Somit gilt: $f'(x) = e^x \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = e^x \cdot 1 = e^x$

□