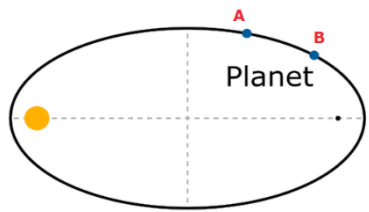


9 Makrokosmos

9.2. Kepler'sche Gesetze – Ankunft der Ellipse

Übungen zu den drei Kepler'schen Gesetzen

- Der Abstand zwischen der Erde und der Sonne ändert sich während der Umlaufzeit. Die numerische Exzentrizität der Erdbahn ist 0,017. Der Zusammenhang zwischen linearer und numerischer Exzentrizität ist durch die Formel $e = \varepsilon \cdot a$ ($B^+ C^+$).
 - Geben Sie eine Formel in Abhängigkeit von der linearen Exzentrizität e und der großen Halbachse a für die Berechnung des maximalen und minimalen Abstandes an.
 - Berechnen Sie den minimalen und den maximalen Abstand zwischen der Erde und der Sonne während des jährlichen Umlaufs.
- Der Planet bewegt sich auf einer elliptischen Bahn um die Sonne. Vergleichen Sie die Geschwindigkeiten des Planeten in der Position A und B miteinander, indem Sie die nebenstehende Abbildung verwenden. Welches Kepler'sche Gesetz kommt zur Anwendung? ($A^+ C^+$)
- Zwei Satelliten umkreisen die Erde auf Kreisbahnen mit den Radien $r_1 = r$ und $r_2 = 3 \cdot r$. Die Bahngeschwindigkeit v_1 des ersten Satelliten beträgt 7,8 km/s. Berechnen Sie die Geschwindigkeit v_2 des zweiten Satelliten in m/s (C^{++}).
- Das dritte Kepler'sche Gesetz gilt nicht nur für die Bewegung der Planeten um die Sonne, sondern auch für alle Bewegungen einer kleinen Masse um eine große Zentralmasse. Der Planet Mars hat zwei Monde (Phobos und Deimos). Berechnen Sie den Wert der Kepler'schen Konstante C für die Bewegung des Mondes Phobos um den Mars und geben Sie ihre Einheit an. Nehmen Sie an, dass Phobos den Mars in 0,3189 Tagen umkreist und einen mittleren Durchmesser von 22,5 km hat.
- Der regelmäßig wiederkehrende Halley'sche Komet wird seit mehr als 2 000 Jahren beobachtet. Zuletzt durchlief er im Jahr 1986 sein Perihel in einem Abstand von 90 Millionen Kilometern. Voraussichtlich wird der Komet im Jahr 2062 diesen sonnennächsten Punkt wieder erreichen ($B^{++} C^{++}$).
 - Berechnen Sie die große Halbachse a seiner Umlaufbahn in AE.
 - Ermitteln Sie die maximale Entfernung des Halley'schen Kometen von der Sonne.
- Der Zwergplanet Ceres befindet sich im Asteroidengürtel. Er ist nach der römischen Göttin des Ackerbaus benannt und wurde im Jahr 1801 von Giuseppe Piazzi entdeckt. Seine Umlaufdauer um die Sonne beträgt 4,6 Jahre ($A^{++} C^{++}$).
 - Leiten Sie mithilfe des dritten Kepler'schen Gesetzes und der Kepler'schen Konstanten eine Formel für die Berechnung des Radius von Ceres her.
 - Berechnen Sie den Ceres-Radius in km und schreiben Sie die Lösung in Gleitkommadarstellung, wenn die Kepler'sche Konstante für das Sonnensystem $2,97 \cdot 10^{-19} \text{ s}^2/\text{m}^3$ beträgt.

Lösung

- a) Der maximale Abstand (= Aphel) ist $r_A = a + e$. Der minimale Abstand (= Perihel) ist $r_P = a - e$.

b) Der maximale Abstand ist $r_A = a + e = a + \varepsilon \cdot a = a \cdot (1 + \varepsilon) = 1,017AE$. Der minimale Abstand ist $r_P = a - e = a - \varepsilon \cdot a = a \cdot (1 - \varepsilon) = 0,983AE$.
- Mithilfe des zweiten KEPLER'SCHEN Gesetzes kann begründet werden, dass die Geschwindigkeit des Planeten im Punkt A größer ist als jene im Punkt B. Man stellt sich einen Fahrstrahl vor, der für ein kleines Zeitintervall Δt von A ausgehend die Fläche AC überschreitet. Das Gleiche wird für den Punkt B überlegt. Damit in gleichen Zeitintervallen die gleichen Flächen überschritten werden, müssen die Geschwindigkeiten unterschiedlich sein.
- Nach dem dritten Kepler'schen Gesetz gilt $\frac{(T_1)^2}{(a_1)^3} = \frac{(T_2)^2}{(a_2)^3}$. Aus dieser Gleichung nach Einsetzen der Zeit T_1 bekommt man für die Umlaufzeit $T_2 = 3\sqrt{3} \cdot T_1 = 3\sqrt{3} \cdot \frac{2\pi \cdot r}{v_1}$. Die Geschwindigkeit beträgt $v_2 = \frac{s_2}{T_2} = \frac{2\pi \cdot (3r)}{3\sqrt{3} \cdot \frac{2\pi \cdot r}{v_1}} = \frac{v_1}{\sqrt{3}} = 4503,33 \text{ m/s}$.
- Die Kepler'sche Konstante $C = \frac{(T_{Phobos})^2}{(r_{Phobos})^3} = \frac{(0,3189 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60)^2}{(22,5 \cdot 10^3)^3} = 2,42 \cdot 10^{-9} \text{ s}^2/\text{m}^3$.
- a) Die Umlaufzeit des Halley'schen Kometen T_H beträgt 2062-1986 = 76 Jahre. Um die große Halbachse zu ermitteln, verwendet man die Kepler'sche Konstante C. Damit bekommt man für die große Halbachse $a_H = \sqrt[3]{\frac{(T_H)^2}{C}} = \sqrt[3]{\frac{(76 \cdot 365 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60)^2}{2,97 \cdot 10^{-19}}} = 2,6843 \cdot 10^{12} \text{ m} = 2,6843 \cdot 10^9 \text{ km} = 17,9AE$.

b) Aus der minimalen Entfernung $d_{\text{Perihel}} = a_H - e$ berechnet man die Exzentrizität der Kometenbahn. Diese beträgt $e = a_H - d_{\text{Perihel}} = 2,6843 \cdot 10^9 \text{ km} - 90 \cdot 10^6 \text{ km} = 2,5943 \cdot 10^9 \text{ km}$. Die maximale Entfernung ist $d_{\text{Aphel}} = a_H + e = 2,6843 \cdot 10^9 \text{ km} + 2,5943 \cdot 10^9 \text{ km} = 35,19 AE$.
- a) Nach dem dritten Kepler'schen Gesetz gilt $\frac{(T_C)^2}{(T_{Erde})^2} = \frac{(r_C)^3}{(r_{Erde})^3}$. Dann wird nach dem Radius von Ceres umgeformt. Man erhält $r_C = \sqrt[3]{\frac{(T_C)^2 \cdot (r_{Erde})^3}{(T_{Erde})^2}} = \sqrt[3]{\frac{(T_C)^2}{C}}$.

b) $r_C = \sqrt[3]{\frac{(T_C)^2}{C}} = \sqrt[3]{\frac{(4,6 \cdot 365 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60)^2}{2,97 \cdot 10^{-19}}} = 4,14 \cdot 10^{11} \text{ m} = 4,14 \cdot 10^8 \text{ km}$