

Formelsammlung

Wahrscheinlichkeitsrechnung

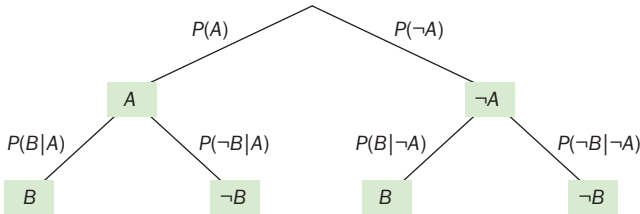
Kombinatorik

$$n, k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$$

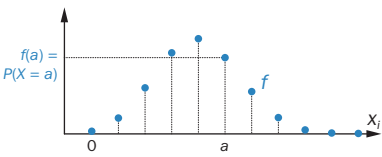
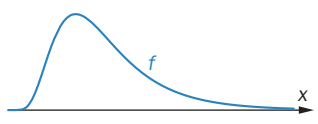
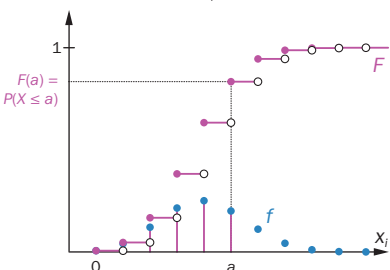
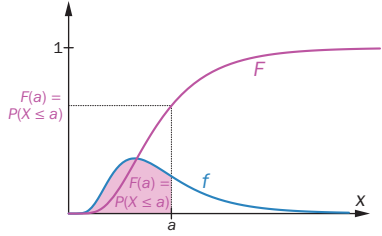
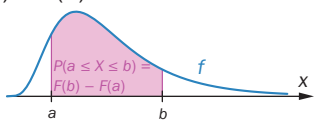
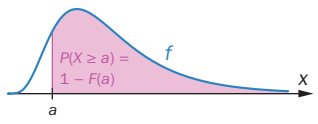
Fakultät (Faktorielle)	$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n$ $0! = 1$
Binomialkoeffizient $k \leq n$	$\binom{n}{k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot [n-(k-1)]}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (k-1) \cdot k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$ $\binom{n}{0} = 1$

Wahrscheinlichkeitsrechnung

Definition	Klassische Deutung (nach Laplace) – Wahrscheinlichkeit als relativer Anteil: Man betrachtet einen Zufallsversuch mit einer endlichen Anzahl von Versuchsausgängen, wobei jeder Ausgang die gleiche Chance besitzt. Für ein Ereignis A definiert man: $P(A) = \frac{\text{Anzahl der Versuchsausgänge, bei denen das Ereignis } A \text{ eintritt}}{\text{Anzahl der möglichen Versuchsausgänge}}$
	Statistische Deutung – Wahrscheinlichkeit als relative Häufigkeit: Wird ein Zufallsversuch n -mal unter denselben Bedingungen durchgeführt (n möglichst groß) und tritt dabei das Ereignis A genau k -mal ein, dann gilt: $P(A) \approx \frac{k}{n}$
Eigenschaften	■ Für jedes Ereignis A gilt: $0 \leq P(A) \leq 1$ ■ $P(\text{unmögliches Ereignis}) = 0$ ■ $P(\text{sicheres Ereignis}) = 1$

Verknüpfung von Ereignissen	■ $\neg A$ ist Gegenereignis von $A \Leftrightarrow P(\neg A) = 1 - P(A)$ ■ Das Ereignis „A und B“ tritt ein, wenn sowohl A, als auch B eintreten. Symbolisch: $A \cap B$ bzw. $A \wedge B$ ■ Das Ereignis „A oder B“ tritt ein, wenn mindestens eines der Ereignisse A oder B eintritt. Symbolisch: $A \cup B$ bzw. $A \vee B$																
Bedingte Wahrscheinlichkeit	$P(B A)$ = Wahrscheinlichkeit, dass B eintritt, wenn man bereits weiß, dass A eingetreten ist.																
Baumdiagramme – Pfadregeln	 Multiplikationsregel: Die Wahrscheinlichkeit für einen bestimmten Pfad ist das Produkt der Einzelwahrscheinlichkeiten entlang dieses Pfades. Additionsregel: Die Wahrscheinlichkeit für ein Ereignis ist die Summe der Wahrscheinlichkeiten aller Pfade, die zu diesem Ereignis führen.																
Vierfeldertafel	<table><tr><th></th><th>B</th><th>¬B</th><th>Summe</th></tr><tr><th>A</th><td>$P(A \wedge B)$</td><td>$P(A \wedge \neg B)$</td><td>$P(A)$</td></tr><tr><th>¬A</th><td>$P(\neg A \wedge B)$</td><td>$P(\neg A \wedge \neg B)$</td><td>$P(\neg A)$</td></tr><tr><th>Summe</th><td>$P(B)$</td><td>$P(\neg B)$</td><td>1</td></tr></table>		B	¬B	Summe	A	$P(A \wedge B)$	$P(A \wedge \neg B)$	$P(A)$	¬A	$P(\neg A \wedge B)$	$P(\neg A \wedge \neg B)$	$P(\neg A)$	Summe	$P(B)$	$P(\neg B)$	1
	B	¬B	Summe														
A	$P(A \wedge B)$	$P(A \wedge \neg B)$	$P(A)$														
¬A	$P(\neg A \wedge B)$	$P(\neg A \wedge \neg B)$	$P(\neg A)$														
Summe	$P(B)$	$P(\neg B)$	1														
Unvereinbarkeit, Unabhängigkeit	■ A und B heißen unvereinbar (einander ausschließend), wenn gilt: $P(A \text{ und } B) = 0$ (A und B können nicht beide gemeinsam eintreten.) ■ A und B heißen unabhängig, wenn gilt: $P(B A) = P(B)$ (Ob A eintritt, hat keinen Einfluss auf das Eintreten von B.)																
Rechenregeln	A, B beliebige Ereignisse	$P(A \text{ und } B) = P(A) \cdot P(B A) = P(B) \cdot P(A B)$															
		$P(A \text{ oder } B) = P(A) + P(B) - P(A \text{ und } B)$															
	A, B unabhängig	$P(A \text{ und } B) = P(A) \cdot P(B)$															
	A, B unvereinbar	$P(A \text{ oder } B) = P(A) + P(B)$															
Satz von Bayes	A, B beliebige Ereignisse	$P(A B) = \frac{P(A) \cdot P(B A)}{P(B)}$ wobei $P(B) = P(A) \cdot P(B A) + P(\neg A) \cdot P(B \neg A)$															

Wahrscheinlichkeitsverteilungen

Zufallsvariable (Zufallsgröße)	Eine Größe X heißt Zufallsvariable , wenn ihr Wert vom Ausgang eines Zufallsversuchs abhängt.	
Wahrscheinlichkeitsverteilung einer Zufallsvariablen X	diskrete Zufallsvariable	stetige Zufallsvariable
	Wahrscheinlichkeitsfunktion f: Jedem Wert $x_1, x_2, \dots, x_n$ ($\in \mathbb{N}$) der Zufallsvariablen X wird eine Wahrscheinlichkeit zugeordnet: $f(x_i) = p_i = P(X = x_i)$ 	Dichtefunktion f: $f(x) \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ $P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x) dx$ $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$ 
	Verteilungsfunktion F: $F(a) = P(X \leq a) = \sum_{x_i \leq a} P(X = x_i)$ 	Verteilungsfunktion F: $F(a) = P(X \leq a) = \int_{-\infty}^a f(x) dx$  es gilt: $P(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a)$  $P(X \geq a) = 1 - F(a)$  $P(a \leq X) = P(a < X)$ $P(a \geq X) = P(a > X)$ $P(X = a) = 0$
	Erwartungswert von X $\mu = E(X) = \sum_{i=1}^n x_i \cdot p_i$	$\mu = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x) dx$
	Varianz von X $\sigma^2 = V(X) = \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 \cdot p_i$	$\sigma^2 = V(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 \cdot f(x) dx$
Standardabweichung von X	$\sigma = \sqrt{V(X)}$	

Binomialverteilung

$$n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$$

Binomialverteilung $B(n, p)$	Man betrachtet einen Zufallsversuch mit genau 2 möglichen Versuchsausgängen: „Erfolg“ mit der Wahrscheinlichkeit p „Misserfolg“ mit der Wahrscheinlichkeit $(1 - p)$ Der Versuch wird n-mal unter gleichen Bedingungen durchgeführt. Die diskrete Zufallsvariable $X =$ „Anzahl der Erfolge“ heißt dann binomialverteilt mit den Parametern n und p.
Wahrscheinlichkeitsfunktion $0 \leq k \leq n$	Ist X binomialverteilt mit den Parametern n und p, dann gilt: $P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1 - p)^{n-k}$
Kennzahlen	Erwartungswert: $\mu = n \cdot p$ Varianz: $\sigma^2 = n \cdot p \cdot (1 - p)$ Standardabweichung: $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1 - p)}$

Normalverteilung (Gauß-Verteilung)

$$\mu, \sigma \in \mathbb{R}, \sigma > 0$$

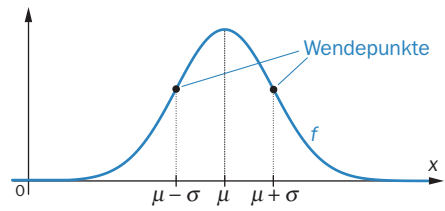
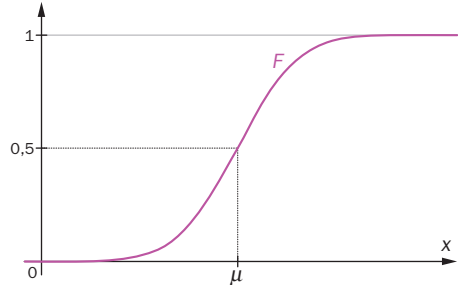
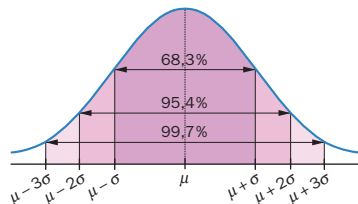
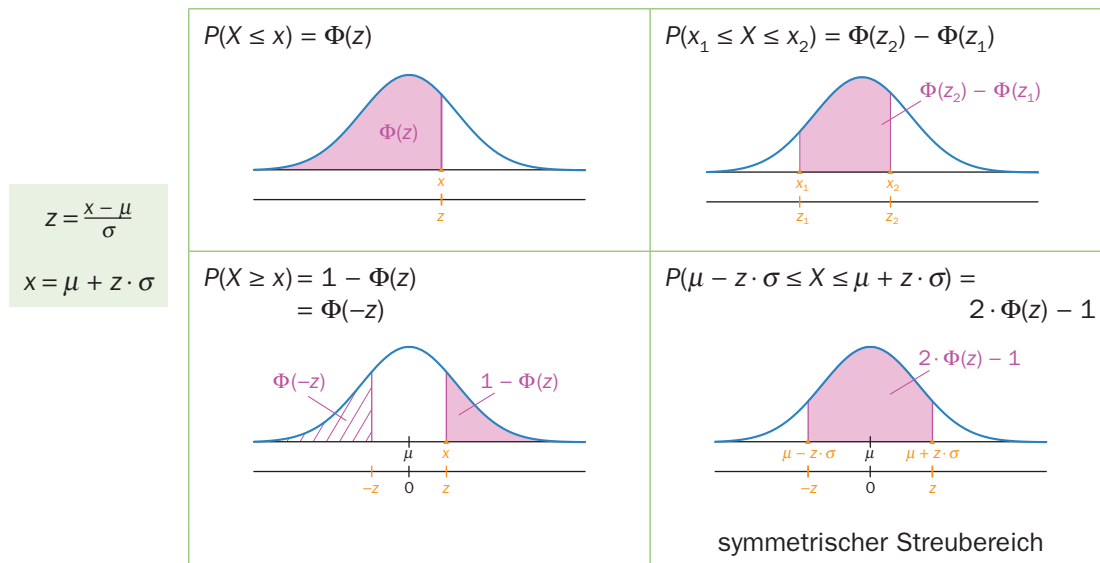
Normalverteilung $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$	Eine stetige Zufallsvariable X ist normalverteilt mit dem Erwartungswert μ und der Standardabweichung σ, wenn für ihre Dichtefunktion f gilt: $f(x) = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$ Dichtefunktion f Der Graph von f heißt Gaußsche Glockenkurve. Verteilungsfunktion F	 
σ-Regeln (σ -Grenzen, Streuintervalle)	Ist X normalverteilt, dann gilt: $P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma) \approx 0,683$ $P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) \approx 0,954$ $P(\mu - 3\sigma \leq X \leq \mu + 3\sigma) \approx 0,997$	

Tabelle Standardnormalverteilung

Funktionswert $\Phi(z)$ der Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung =
Flächeninhalt unterhalb der Dichtefunktion φ im Intervall $]-\infty; z]$



z	$\Phi(-z)$	$\Phi(z)$
0,00	0,5000	0,5000
0,01	0,4960	0,5040
0,02	0,4920	0,5080
0,03	0,4880	0,5120
0,04	0,4840	0,5160
0,05	0,4801	0,5199
0,06	0,4761	0,5239
0,07	0,4721	0,5279
0,08	0,4681	0,5319
0,09	0,4641	0,5359
0,10	0,4602	0,5398
0,11	0,4562	0,5438
0,12	0,4522	0,5478
0,13	0,4483	0,5517
0,14	0,4443	0,5557
0,15	0,4404	0,5596
0,16	0,4364	0,5636
0,17	0,4325	0,5675
0,18	0,4286	0,5714
0,19	0,4247	0,5753
0,20	0,4207	0,5793
0,21	0,4168	0,5832
0,22	0,4129	0,5871
0,23	0,4090	0,5910
0,24	0,4052	0,5948
0,25	0,4013	0,5987
0,26	0,3974	0,6026
0,27	0,3936	0,6064
0,28	0,3897	0,6103
0,29	0,3859	0,6141

z	$\Phi(-z)$	$\Phi(z)$
0,30	0,3821	0,6179
0,31	0,3783	0,6217
0,32	0,3745	0,6255
0,33	0,3707	0,6293
0,34	0,3669	0,6331
0,35	0,3632	0,6368
0,36	0,3594	0,6406
0,37	0,3557	0,6443
0,38	0,3520	0,6480
0,39	0,3483	0,6517
0,40	0,3446	0,6554
0,41	0,3409	0,6591
0,42	0,3372	0,6628
0,43	0,3336	0,6664
0,44	0,3300	0,6700
0,45	0,3264	0,6736
0,46	0,3228	0,6772
0,47	0,3192	0,6808
0,48	0,3156	0,6844
0,49	0,3121	0,6879
0,50	0,3085	0,6915
0,51	0,3050	0,6950
0,52	0,3015	0,6985
0,53	0,2981	0,7019
0,54	0,2946	0,7054
0,55	0,2912	0,7088
0,56	0,2877	0,7123
0,57	0,2843	0,7157
0,58	0,2810	0,7190
0,59	0,2776	0,7224

z	$\Phi(-z)$	$\Phi(z)$
0,60	0,2743	0,7257
0,61	0,2709	0,7291
0,62	0,2676	0,7324
0,63	0,2643	0,7357
0,64	0,2611	0,7389
0,65	0,2578	0,7422
0,66	0,2546	0,7454
0,67	0,2514	0,7486
0,68	0,2483	0,7517
0,69	0,2451	0,7549
0,70	0,2420	0,7580
0,71	0,2389	0,7611
0,72	0,2358	0,7642
0,73	0,2327	0,7673
0,74	0,2296	0,7704
0,75	0,2266	0,7734
0,76	0,2236	0,7764
0,77	0,2206	0,7794
0,78	0,2177	0,7823
0,79	0,2148	0,7852
0,80	0,2119	0,7881
0,81	0,2090	0,7910
0,82	0,2061	0,7939
0,83	0,2033	0,7967
0,84	0,2005	0,7995
0,85	0,1977	0,8023
0,86	0,1949	0,8051
0,87	0,1922	0,8078
0,88	0,1894	0,8106
0,89	0,1867	0,8133

z	$\Phi(-z)$	$\Phi(z)$
0,90	0,1841	0,8159
0,91	0,1814	0,8186
0,92	0,1788	0,8212
0,93	0,1762	0,8238
0,94	0,1736	0,8264
0,95	0,1711	0,8289
0,96	0,1685	0,8315
0,97	0,1660	0,8340
0,98	0,1635	0,8365
0,99	0,1611	0,8389
1,00	0,1587	0,8413
1,01	0,1562	0,8438
1,02	0,1539	0,8461
1,03	0,1515	0,8485
1,04	0,1492	0,8508
1,05	0,1469	0,8531
1,06	0,1446	0,8554
1,07	0,1423	0,8577
1,08	0,1401	0,8599
1,09	0,1379	0,8621
1,10	0,1357	0,8643
1,11	0,1335	0,8665
1,12	0,1314	0,8686
1,13	0,1292	0,8708
1,14	0,1271	0,8729
1,15	0,1251	0,8749
1,16	0,1230	0,8770
1,17	0,1210	0,8790
1,18	0,1190	0,8810
1,19	0,1170	0,8830

z	$\Phi(-z)$	$\Phi(z)$
1,20	0,1151	0,8849
1,21	0,1131	0,8869
1,22	0,1112	0,8888
1,23	0,1093	0,8907
1,24	0,1075	0,8925
1,25	0,1056	0,8944
1,26	0,1038	0,8962
1,27	0,1020	0,8980
1,28	0,1003	0,8997
1,29	0,0985	0,9015
1,30	0,0968	0,9032
1,31	0,0951	0,9049
1,32	0,0934	0,9066
1,33	0,0918	0,9082
1,34	0,0901	0,9099
1,35	0,0885	0,9115
1,36	0,0869	0,9131
1,37	0,0853	0,9147
1,38	0,0838	0,9162
1,39	0,0823	0,9177
1,40	0,0808	0,9192
1,41	0,0793	0,9207
1,42	0,0778	0,9222
1,43	0,0764	0,9236
1,44	0,0749	0,9251
1,45	0,0735	0,9265
1,46	0,0721	0,9279
1,47	0,0708	0,9292
1,48	0,0694	0,9306
1,49	0,0681	0,9319

z	$\Phi(-z)$	$\Phi(z)$
1,50	0,0668	0,9332
1,51	0,0655	0,9345
1,52	0,0643	0,9357
1,53	0,0630	0,9370
1,54	0,0618	0,9382
1,55	0,0606	0,9394
1,56	0,0594	0,9406
1,57	0,0582	0,9418
1,58	0,0571	0,9429
1,59	0,0559	0,9441
1,60	0,0548	0,9452
1,61	0,0537	0,9463
1,62	0,0526	0,9474
1,63	0,0516	0,9484
1,64	0,0505	0,9495
1,65	0,0495	0,9505
1,66	0,0485	0,9515
1,67	0,0475	0,9525
1,68	0,0465	0,9535
1,69	0,0455	0,9545
1,70	0,0446	0,9554
1,71	0,0436	0,9564
1,72	0,0427	0,9573
1,73	0,0418	0,9582
1,74	0,0409	0,9591
1,75	0,0401	0,9599
1,76	0,0392	0,9608
1,77	0,0384	0,9616
1,78	0,0375	0,9625
1,79	0,0367	0,9633
1,80	0,0359	0,9641
1,81	0,0351	0,9649
1,82	0,0344	0,9656
1,83	0,0336	0,9664
1,84	0,0329	0,9671
1,85	0,0322	0,9678
1,86	0,0314	0,9686
1,87	0,0307	0,9693
1,88	0,0301	0,9699
1,89	0,0294	0,9706
1,90	0,0287	0,9713
1,91	0,0281	0,9719
1,92	0,0274	0,9726
1,93	0,0268	0,9732
1,94	0,0262	0,9738
1,95	0,0256	0,9744
1,96	0,0250	0,9750
1,97	0,0244	0,9756
1,98	0,0239	0,9761
1,99	0,0233	0,9767

z	$\Phi(-z)$	$\Phi(z)$
2,00	0,0228	0,9772
2,01	0,0222	0,9778
2,02	0,0217	0,9783
2,03	0,0212	0,9788
2,04	0,0207	0,9793
2,05	0,0202	0,9798
2,06	0,0197	0,9803
2,07	0,0192	0,9808
2,08	0,0188	0,9812
2,09	0,0183	0,9817
2,10	0,0179	0,9821
2,11	0,0174	0,9826
2,12	0,0170	0,9830
2,13	0,0166	0,9834
2,14	0,0162	0,9838
2,15	0,0158	0,9842
2,16	0,0154	0,9846
2,17	0,0150	0,9850
2,18	0,0146	0,9854
2,19	0,0143	0,9857
2,20	0,0139	0,9861
2,21	0,0136	0,9864
2,22	0,0132	0,9868
2,23	0,0129	0,9871
2,24	0,0125	0,9875
2,25	0,0122	0,9878
2,26	0,0119	0,9881
2,27	0,0116	0,9884
2,28	0,0113	0,9887
2,29	0,0110	0,9890
2,30	0,0107	0,9893
2,31	0,0104	0,9896
2,32	0,0102	0,9898
2,33	0,0099	0,9901
2,34	0,0096	0,9904
2,35	0,0094	0,9906
2,36	0,0091	0,9909
2,37	0,0089	0,9911
2,38	0,0087	0,9913
2,39	0,0084	0,9916
2,40	0,0082	0,9918
2,41	0,0080	0,9920
2,42	0,0078	0,9922
2,43	0,0075	0,9925
2,44	0,0073	0,9927
2,45	0,0071	0,9929
2,46	0,0069	0,9931
2,47	0,0068	0,9932
2,48	0,0066	0,9934
2,49	0,0064	0,9936

z	$\Phi(-z)$	$\Phi(z)$
2,50	0,0062	0,9938
2,51	0,0060	0,9940
2,52	0,0059	0,9941
2,53	0,0057	0,9943
2,54	0,0055	0,9945
2,55	0,0054	0,9946
2,56	0,0052	0,9948
2,57	0,0051	0,9949
2,58	0,0049	0,9951
2,59	0,0048	0,9952
2,60	0,0047	0,9953
2,61	0,0045	0,9955
2,62	0,0044	0,9956
2,63	0,0043	0,9957
2,64	0,0041	0,9959
2,65	0,0040	0,9960
2,66	0,0039	0,9961
2,67	0,0038	0,9962
2,68	0,0037	0,9963
2,69	0,0036	0,9964
2,70	0,0035	0,9965
2,71	0,0034	0,9966
2,72	0,0033	0,9967
2,73	0,0032	0,9968
2,74	0,0031	0,9969
2,75	0,0030	0,9970
2,76	0,0029	0,9971
2,77	0,0028	0,9972
2,78	0,0027	0,9973
2,79	0,0026	0,9974
2,80	0,0026	0,9974
2,81	0,0025	0,9975
2,82	0,0024	0,9976
2,83	0,0023	0,9977
2,84	0,0023	0,9977
2,85	0,0022	0,9978
2,86	0,0021	0,9979
2,87	0,0021	0,9979
2,88	0,0020	0,9980
2,89	0,0019	0,9981
2,90	0,0019	0,9981
2,91	0,0018	0,9982
2,92	0,0018	0,9982
2,93	0,0017	0,9983
2,94	0,0016	0,9984
2,95	0,0016	0,9984
2,96	0,0015	0,9985
2,97	0,0015	0,9985
2,98	0,0014	0,9986
2,99	0,0014	0,9986

z	$\Phi(-z)$	$\Phi(z)$
3,00	0,0013	0,9987
3,01	0,0013	0,9987
3,02	0,0013	0,9987
3,03	0,0012	0,9988
3,04	0,0012	0,9988
3,05	0,0011	0,9989
3,06	0,0011	0,9989
3,07	0,0011	0,9989
3,08	0,0010	0,9990
3,09	0,0010	0,9990
3,10	0,0010	0,9990
3,11	0,0009	0,9991
3,12	0,0009	0,9991
3,13	0,0009	0,9991
3,14	0,0008	0,9992
3,15	0,0008	0,9992
3,16	0,0008	0,9992
3,17	0,0008	0,9992
3,18	0,0007	0,9993
3,19	0,0007	0,9993
3,20	0,0007	0,9993
3,21	0,0007	0,9993
3,22	0,0006	0,9994
3,23	0,0006	0,9994
3,24	0,0006	0,9994
3,25	0,0006	0,9994
3,26	0,0006	0,9994
3,27	0,0005	0,9995
3,28	0,0005	0,9995
3,29	0,0005	0,9995
3,30	0,0005	0,9995
3,31	0,0005	0,9995
3,32	0,0005	0,9995
3,33	0,0004	0,9996
3,34	0,0004	0,9996
3,35	0,0004	0,9996
3,36	0,0004	0,9996
3,37	0,0004	0,9996
3,38	0,0004	0,9996
3,39	0,0003	0,9997
3,40	0,0003	0,9997
3,41	0,0003	0,9997
3,42	0,0003	0,9997
3,43	0,0003	0,9997
3,44	0,0003	0,9997
3,45	0,0003	0,9997
3,46	0,0003	0,9997
3,47	0,0003	0,9997
3,48	0,0003	0,9997
3,49	0,0002	0,9998

z	$\Phi(-z)$	$\Phi(z)$
3,50	0,0002	0,9998
3,51	0,0002	0,9998
3,52	0,0002	0,9998
3,53	0,0002	0,9998
3,54	0,0002	0,9998
3,55	0,0002	0,9998
3,56	0,0002	0,9998
3,57	0,0002	0,9998
3,58	0,0002	0,9998
3,59	0,0002	0,9998
3,60	0,0002	0,9998
3,61	0,0002	0,9998
3,62	0,0001	0,9999
3,63	0,0001	0,9999
3,64	0,0001	0,9999
3,65	0,0001	0,9999
3,66	0,0001	0,9999
3,67	0,0001	0,9999
3,68	0,0001	0,9999
3,69	0,0001	0,9999
3,70	0,0001	0,9999
3,71	0,0001	0,9999
3,72	0,0001	0,9999
3,73	0,0001	0,9999
3,74	0,0001	0,9999
3,75	0,0001	0,9999
3,76	0,0001	0,9999
3,77	0,0001	0,9999
3,78	0,0001	0,9999
3,79	0,0001	0,9999
3,80	0,0001	0,9999
3,81	0,0001	0,9999
3,82	0,0001	0,9999
3,83	0,0001	0,9999
3,84	0,0001	0,9999
3,85	0,0001	0,9999
3,86	0,0001	0,9999
3,87	0,0001	0,9999
3,88	0,0001	0,9999
3,89	0,0001	0,9999
$\geq 3,90$	≈ 0	≈ 1