

Arbeiten mit Modellen



Geometrische Modelle

Ein Modell ist eine Vereinfachung der Realität. Ein Modellboot ist beispielsweise ein **geometrisches Modell**, da es zwar die Form des Motorbootes, jedoch nicht seine realen Abmessungen wiedergibt. Je nach Fragestellung werden unterschiedliche Modelle verwendet. Dient das Modellboot nur als Anschauungsobjekt, ist das geometrische Modell in einem geeigneten Maßstab durchaus ausreichend. Verwendet man das Modellboot, um in einem Experiment den Fahrwiderstand des Schiffes zu bestimmen, muss das Modell neben den geometrischen Vereinfachungen zusätzlich noch dieselben hydrodynamischen Eigenschaften wie das Original aufweisen.



Eine wichtige Größe geometrischer Modelle ist der **Maßstab M**. Dieser gibt an, in welchem Verhältnis die Abmessungen des Modells zu den Abmessungen des Originals stehen.

Beispiel 1: Ein Maßstab von $M = 1 : 2$ bedeutet, dass das Modell halb so groß ist wie das Original, z. B. 1 cm im Modell entspricht 2 cm im Original. Das Modell ist eine Verkleinerung.

Beispiel 2: Ein Maßstab von $M = 5 : 1$ bedeutet, dass das Modell fünfmal so groß ist wie das Original, d. h. 5 cm im Modell entsprechen 1 cm im Original. Das Modell ist eine Vergrößerung.

Mathematische Modelle

Bei vielen Fragestellungen der Naturwissenschaft und Technik werden **mathematische Modelle** verwendet, um aus gemessenen Daten Prognosen über einen zukünftigen Verlauf vorherzusagen.

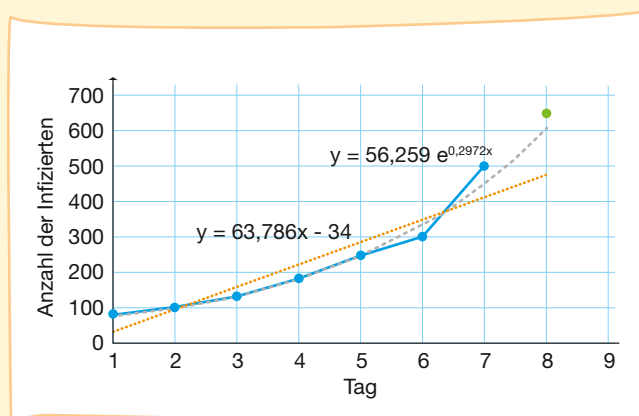
Messfehler – Modellfehler

Die Güte dieser Vorhersage hängt maßgeblich vom gewählten Modell ab. Für die Beurteilung des Modellfehlers verwendet man im einfachsten Fall die Formel zur Bestimmung eines relativen Messfehlers:

$$f_M = \frac{x_{\text{gemessen}} - x_{\text{wahr}}}{x_{\text{wahr}}} \cdot 100 [\%]$$

Modellfehler an einem Beispiel

Während einer Pandemie wurden eine Woche lang (Tag 1 bis Tag 7) Infektionszahlen aufgezeichnet (blaue Kurve). Es wurde versucht, mit diesen ermittelten Daten die Anzahl der Infizierten für den zukünftigen Tag 8 vorherzusagen. Die Prognose des achten Tages ergibt z. B. mit einem linearen Modell (orange Kurve) eine Infektionszahl von 476 und mit einem exponentiellen Modell (graue Kurve) 606 Neuinfizierte.



Am Tag 8 werden 650 neu infizierte Personen gemeldet (grünlicher Punkt). Aus dem Schaubild ist ersichtlich, dass das exponentielle Modell dem realen Wert vom Tag 8 deutlich näherkommt. Berechnet man den Modellfehler für die beiden Verfahren nach obiger Formel, ergibt sich für das lineare Modell ein Fehler von 27 % und für das exponentielle Modell ein Fehler von 7 %. Das exponentielle Modell weist den kleineren Modellfehler auf und ist daher besser für die Prognose der Infektionszahlen geeignet.



In NaWi@HAK 1 hast du bereits einiges über Atommodelle gelernt. Schlage dazu im ersten Band dieser Buchreihe nach und wiederhole das Kapitel 2.1 in Teil 1.

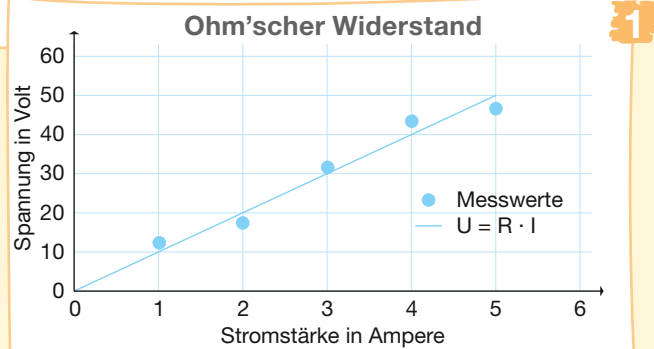
Mathematische Modelle der Naturwissenschaft

Für viele Prozesse und Abläufe ist bereits bekannt, welche Modelle zu deren Beschreibung verwendet werden können. Vier gängige Modelle und einige Anwendungen werden Ihnen auf dieser Seite vorgestellt. Beachten Sie beim Arbeiten mit Modellen, dass ein Modell durch Vereinfachungen in der Modellbildung die Realität zumeist nicht exakt darstellen kann.

Das lineare Modell

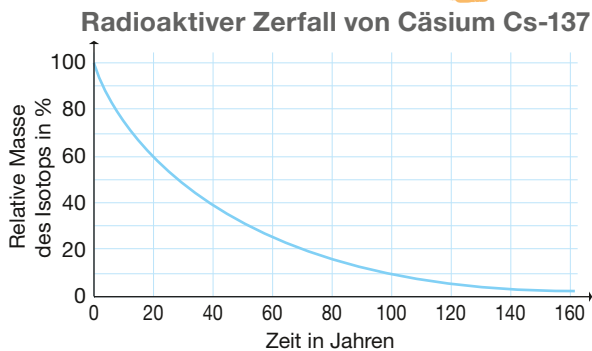
Das lineare Modell $y(x) = k \cdot x + d$ beschreibt in seiner homogenen Form $y(x) = k \cdot x$ viele Zusammenhänge der Physik. Das **Ohm'sche Gesetz** der Elektrotechnik oder das **Federgesetz** der Mechanik sind Beispiele für eine lineare Modellierung.

Die Bestimmung der Koeffizienten k und d für eine Trendlinie von Messdaten wird als **lineare Regression** bezeichnet.



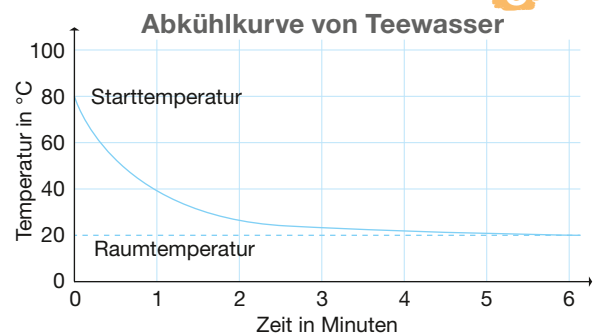
Das exponentielle Modell

Das exponentielle Modell $y(t) = a \cdot e^{\lambda t}$ beschreibt in der Physik den **Zerfall von radioaktiven Substanzen** und in der Biologie die **Zu- oder Abnahme von Populationen**, den **Anstieg von Infektionen** einer Pandemie oder den **Abbau von Substanzen** (Alkohol, Medikamente ...) im Körper.



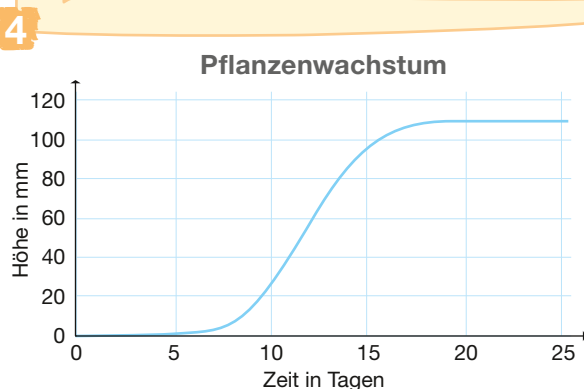
Das beschränkte Modell

Das beschränkte Modell $y(t) = (C - S) \cdot e^{-\lambda t}$ beschreibt in der Naturwissenschaft Ausgleichsprozesse wie beispielsweise den **Temperaturausgleich zweier Körper** oder den **Konzentrationsausgleich in Flüssigkeiten** durch Diffusion.



Das logistische Modell

Das logistische Modell $y(t) = \frac{S}{1 + C \cdot e^{-\lambda t}}$ beschreibt in der Naturwissenschaft **Ausbreitungs- oder Wachstumsprozesse**, die zu Beginn beschleunigt, später verzögert ablaufen und sich letztlich asymptotisch einem Grenzwert nähern. Beispiele für diese Prozesse sind die Ausbreitung von Populationen mit begrenzten Ressourcen, z. B. Nahrungsquellen.



Ein weiteres mathematisches Werkzeug in den Naturwissenschaften ist die **Statistik**. Eine Methodenseite zu deren Einsatz und Anwendung finden Sie in NaWi@HAK 4. Teil 2.