

5.6 Integrationsmethoden E

Partielle Integration

Bei der Partiellen Integration handelt es sich um eine Umkehrung der Produktregel.

Herleitung:

$$\begin{aligned}(u \cdot v)' &= u' \cdot v + u \cdot v' && \text{beide Seiten der Gleichung integrieren} \\ \int (u \cdot v)' &= \int u' \cdot v + \int u \cdot v' && \text{es gilt: } \int (u \cdot v)' = u \cdot v \\ u \cdot v &= \int u' \cdot v + \int u \cdot v' && \text{umformen nach } \int u \cdot v' \\ \int u \cdot v' &= u \cdot v - \int u' \cdot v\end{aligned}$$

Diese Formel kann dann hilfreich sein, wenn die zu integrierende Funktion als Produkt zweier Funktionen u und v' angeschrieben werden kann, wobei ...

- die Funktion v' einfach zu integrieren ist und
- die Funktion $(u' \cdot v)$ einfach zu integrieren ist.

PARTIELLE INTEGRATION.

Ist u differenzierbar, v' stetig und v eine Stammfunktion von v' , dann gilt:

$$\int u(x) \cdot v'(x) dx = u(x) \cdot v(x) - \int u'(x) \cdot v(x) dx \quad \text{kurz: } \int u \cdot v' = u \cdot v - \int u' \cdot v$$

MUSTERBEISPIEL.

$$f(x) = x \cdot e^x \quad \text{Berechnen Sie } \int f(x) dx.$$

LÖSUNG.

$$f(x) = \underbrace{x}_{u(x)} \cdot \underbrace{e^x}_{v'(x)} \quad \text{Berechne } u' \text{ und } v: \quad u'(x) = 1, \quad v(x) = e^x$$

$$\begin{aligned}\int u(x) \cdot v'(x) dx &= u(x) \cdot v(x) - \int u'(x) \cdot v(x) dx \\ &= x \cdot e^x - \int 1 \cdot e^x dx \\ &= x \cdot e^x - \int e^x dx \\ &= x \cdot e^x - e^x + c \\ &= (x + 1) \cdot e^x + c\end{aligned}$$

✖ Überprüfen Sie, ob die Berechnung im obigen Beispiel auch mit den Festlegungen $u(x) = e^x$ und $v'(x) = x$ möglich gewesen wäre.

✖ Berechnen Sie: a) $\int (x + 5) \cdot e^x dx$ b) $\int (2 \cdot x - 1) \cdot e^x dx$

Integration durch Substitution

Kommt in der zu integrierenden Funktion eine verkettete Funktion vor, dann kann man versuchen, ob die Funktion leichter integriert werden kann, wenn man die innere Funktion durch eine neue Variable ersetzt:

MUSTERBEISPIEL.

$$f(x) = x^2 \cdot \sqrt{x^3 - 1} \quad \text{Berechnen Sie } \int f(x) dx .$$

LÖSUNG.

Setzt man $u = x^3 - 1$, dann gilt: $u'(x) = \frac{du}{dx} = 3 \cdot x^2$ bzw. $dx = \frac{1}{3 \cdot x^2} du$

$$\begin{aligned} \int f(x) dx &= \int x^2 \cdot \sqrt{x^3 - 1} dx && \text{Anwenden der oben definierten Substitution} \\ &= \int x^2 \cdot \sqrt{u} \cdot \frac{1}{3 \cdot x^2} du && \\ &= \int \sqrt{u} \cdot \frac{1}{3} du && \text{durch Kürzen fällt das } x^2 \text{ weg} \\ &= \frac{1}{3} \cdot \int \sqrt{u} du \\ &= \frac{1}{3} \cdot \int u^{\frac{1}{2}} du \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c \\ &= \frac{2}{9} \cdot u^{\frac{3}{2}} + c && \text{Rückeinsetzen} \\ &= \frac{2}{9} \cdot (x^3 - 1)^{\frac{3}{2}} + c \end{aligned}$$

Hinweis: Substitution funktioniert dann, wenn in der der zu integrierenden Funktion die Ableitung der inneren Funktion (bis auf einen konstanten Faktor) vorkommt. Nur deswegen konnten wir im obigen Beispiel von der 2. auf die 3. Zeile kürzen.

✖ Zeigen Sie durch Ableiten des Ergebnisses, dass das Integral im obigen Beispiel richtig berechnet wurde.

✖ Berechnen Sie: a) $\int e^{\frac{1}{2}x+5} dx$ b) $\int x \cdot e^{x^2} dx$ c) $\int x^3 \cdot (x^4 + 5)^{100} dx$