Formelsammlung

Wahrscheinlichkeitsrechnung

Kombinatorik

$n, k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$

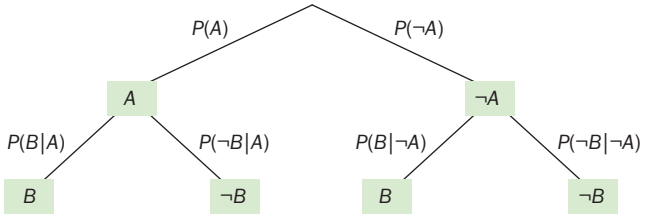
Fakultät (Faktorielle)	$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n$ $0! = 1$
Binomialkoeffizient $k \leq n$	$\binom{n}{k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot [n-(k-1)]}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (k-1) \cdot k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$ $\binom{n}{0} = 1$

Wahrscheinlichkeitsrechnung

Definition	**Klassische Deutung (nach Laplace) – Wahrscheinlichkeit als relativer Anteil:** Man betrachtet einen Zufallsversuch mit einer endlichen Anzahl von Versuchsausgängen, wobei jeder Ausgang die gleiche Chance besitzt. Für ein Ereignis A definiert man: $P(A) = \frac{\text{Anzahl der Versuchsausgänge, bei denen das Ereignis } A \text{ eintritt}}{\text{Anzahl der möglichen Versuchsausgänge}}$
	Statistische Deutung – Wahrscheinlichkeit als relative Häufigkeit: Wird ein Zufallsversuch n-mal unter denselben Bedingungen durchgeführt (n möglichst groß) und tritt dabei das Ereignis A genau k-mal ein, dann gilt: $P(A) \approx \frac{k}{n}$
Eigenschaften	▪ Für jedes Ereignis A gilt: $0 \leq P(A) \leq 1$ ▪ P(unmögliches Ereignis) = 0 ▪ P(sicheres Ereignis) = 1

<table>
<tr><td>Verknüpfung von Ereignissen</td><td colspan="2">

$\neg A$ ist Gegenereignis von A $\Leftrightarrow$ $P(\neg A) = 1 - P(A)$
Das Ereignis „A und B“ tritt ein, wenn sowohl A, als auch B eintreten.
Symbolisch: $A \cap B$ bzw. $A \wedge B$
Das Ereignis „A oder B“ tritt ein, wenn mindestens eines der Ereignisse A oder B eintritt.
Symbolisch: $A \cup B$ bzw. $A \vee B$

</td></tr>
<tr><td>Bedingte Wahrscheinlichkeit</td><td colspan="2">$P(B|A)$ = Wahrscheinlichkeit, dass B eintritt, wenn man bereits weiß, dass A eingetreten ist.</td></tr>
<tr><td>Baumdiagramme – Pfadregeln</td><td colspan="2">


Multiplikationsregel:
Die Wahrscheinlichkeit für einen bestimmten Pfad ist das Produkt der Einzelwahrscheinlichkeiten entlang dieses Pfades.

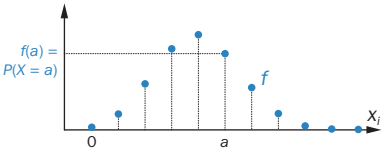
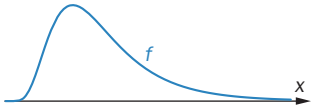
Additionsregel:
Die Wahrscheinlichkeit für ein Ereignis ist die Summe der Wahrscheinlichkeiten aller Pfade, die zu diesem Ereignis führen.
</td></tr>
<tr><td>Unvereinbarkeit, Unabhängigkeit</td><td colspan="2">

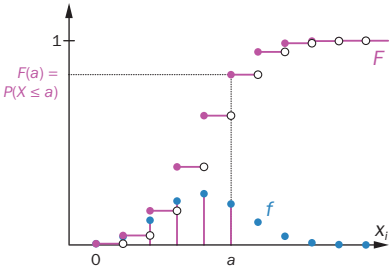
A und B heißen unvereinbar (einander ausschließend), wenn gilt:
$P(A \text{ und } B) = 0$
(A und B können nicht beide gemeinsam eintreten.)
A und B heißen unabhängig, wenn gilt:
$P(B|A) = P(B)$
(Ob A eintritt, hat keinen Einfluss auf das Eintreten von B.)

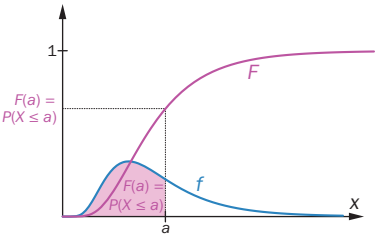
</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Rechenregeln</td><td>A, B unabhängig</td><td>$P(A \text{ und } B) = P(A) \cdot P(B)$</td></tr>
<tr><td>A, B unvereinbar</td><td>$P(A \text{ oder } B) = P(A) + P(B)$</td></tr>
</table>

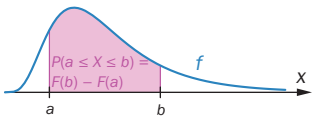
Wahrscheinlichkeitsverteilungen

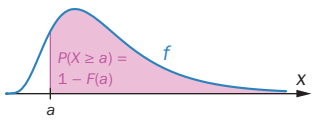
<table>
<tr><td>Zufallsvariable
(Zufallsgröße)</td><td colspan="2">Eine Größe X heißt Zufallsvariable, wenn ihr Wert vom Ausgang eines Zufallsversuchs abhängt.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Wahrscheinlichkeitsverteilung
einer Zufallsvariablen X</td><td>diskrete Zufallsvariable</td><td>stetige Zufallsvariable</td></tr>
<tr><td>Wahrscheinlichkeitsfunktion f:

Jedem Wert $x_1, x_2, \ldots, x_n$ $(\in \mathbb{N})$ der Zufallsvariablen X wird eine Wahrscheinlichkeit zugeordnet:
$f(x_i) = p_i = P(X = x_i)$

</td><td>Dichtefunktion f:
▪ $f(x) \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$
▪ $P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)\,dx$
▪ $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$

</td></tr>
<tr><td></td><td>Verteilungsfunktion F:

$F(a) = P(X \leq a) = \sum_{x_i \leq a} P(X = x_i)$

</td><td>Verteilungsfunktion F:

$F(a) = P(X \leq a) = \int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx$


es gilt:
▪ $P(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a)$


▪ $P(X \geq a) = 1 - F(a)$


▪ $P(a \leq X) = P(a < X)$
$P(a \geq X) = P(a > X)$
$P(X = a) = 0$</td></tr>
<tr><td>Erwartungswert
von X</td><td>$\mu = E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot p_i$</td><td>$\mu = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)\,dx$</td></tr>
<tr><td>Varianz
von X</td><td>$\sigma^2 = V(X) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2 \cdot p_i$</td><td>$\sigma^2 = V(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 \cdot f(x)\,dx$</td></tr>
<tr><td>Standardabweichung von X</td><td colspan="2">$\sigma = \sqrt{V(X)}$</td></tr>
</table>

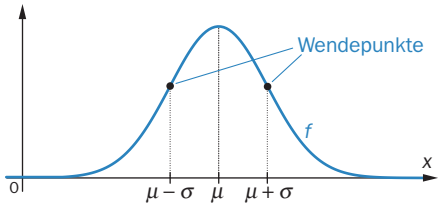
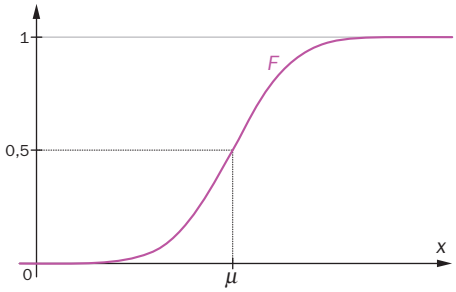
Binomialverteilung

$n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$

Binomialverteilung $B(n, p)$	Man betrachtet einen Zufallsversuch mit genau 2 möglichen Versuchsausgängen: ▪ „Erfolg“ mit der Wahrscheinlichkeit p ▪ „Misserfolg“ mit der Wahrscheinlichkeit $(1 - p)$ Der Versuch wird n-mal unter gleichen Bedingungen durchgeführt. Die diskrete Zufallsvariable X = „Anzahl der Erfolge“ heißt dann **binomialverteilt mit den Parametern n und p.**
Wahrscheinlichkeitsfunktion $0 \le k \le n$	Ist X binomialverteilt mit den Parametern n und p, dann gilt: $P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1 - p)^{n-k}$
Kennzahlen	Erwartungswert: $\mu = n \cdot p$ Varianz: $\sigma^2 = n \cdot p \cdot (1 - p)$ Standardabweichung: $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1 - p)}$

Normalverteilung (Gauß-Verteilung)

$\mu, \sigma \in \mathbb{R}, a > 0$

Normalverteilung $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$	Eine stetige Zufallsvariable X ist normalverteilt mit dem **Erwartungswert** μ und der **Standardabweichung** σ, wenn für ihre Dichtefunktion f gilt: $f(x) = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$ **Dichtefunktion f** Der Graph von f heißt **Gaußsche Glockenkurve.**  **Verteilungsfunktion F** 
σ-Regeln (σ-Grenzen, Streuintervalle)	Ist X normalverteilt, dann gilt: ▪ $P(\mu - \sigma \le X \le \mu + \sigma) \approx 0{,}683$ ▪ $P(\mu - 2\sigma \le X \le \mu + 2\sigma) \approx 0{,}954$ ▪ $P(\mu - 3\sigma \le X \le \mu + 3\sigma) \approx 0{,}997$ 